मराठी

माध्यमिक त्रिकोणमिति

(Intermediate Trigonometry)

लेखक

यशवन्त विनायक ठोसर, एम्. एस्सी.

प्राध्यापक, विज्ञान महाविद्यालय, नागपुर.

गणित-सम्पादक

नीलकण्ठ मावाजी शास्त्री, एम्. एस्सी. (लंडन)

प्राध्यापक, महाकोशल महाविद्यालय, जबलपुर

FOREWORD

Convinced of the educational and national value of the use of Indian Languages in Indian Universities, the Academic Council of Nagpur University, on 12th September, 1946, resolved that Hindi and Marathi shall be the media of instruction in the University for the Intermediate courses in Arts and Science from the academic year 1949 50 and for the courses for the B A and B Sc , from the academic year 1951 52 And from the same dates English shall cease to be the medium of instruction in the University

While co operating whole heartedly in the prolonged All India deliberations for the long-range planning for introduction of Indian languages as media of instruction, Nagpur University has—except as regards postponement of the scheme in respect of the science courses for one year—stuck to its schedule, endeavouring, with all its limitations, to surmount the imme-

diate practical difficulties in carrying through a linguistic transition of this magnitude

2 These difficulties are, in the main, the three T's of Terms, Text-books and Teachers

Thanks to the timely initiative and generous support of its Government, it was possible for the State of Madhya Pradesh to obtain the services of Dr Raghu Vira of the International Academy of Indian Culture of Lahore and to entrust him with the formidable but foundational task of coining and adapting the technical terms of science for the needs of the new linguistic media Dr Raghu Vira, who had already devoted a considerable part of his life to a scientific approach to the problem of technical terms has proceeded to his task on the basic principle of *allied words for allied ideas*, derived from the Sanskrit roots He has reduced the problem of coining terms almost to an art, an art as fine as it is useful

3 These terms have been coined and adapted in close collaboration with a band of experienced and enthusiastic teachers of science deputed by the State Government at the same time to prepare suitable text books of science

under the general direction and guidance of Dr Raghu Vira

They have so far prepard fourteen text-books each with a Hindi and a Marathi version dealing with the Intermediate Science courses in Algebra, Trigonometry, Solid Geometry, Co ordinate Geometry, Statics, Dynamics, Physics (Theory), Practical Physics, General and Inorganic Chemistry, Organic Chemistry, Practical Chemistry, Zoology, Botany (Theory) and Botany (Practical)

The manuscripts of these text-books, when received from the Government, were referred by the University to its Boards of Studies in the various subjects and, on receipt of their reports, the Academic Council decided, on 8th December, 1949, that, subject to certain specified changes, they be recommended as suitable for the Inter mediate Science courses of the University

4 Finally, in accordance with a suggestion of the State Government and with the help of an appropriate Government grant, the University decided in April, 1950, to undertake the publication of these first text books prepared for its courses in science Their printing is now

in progress and seven of these—both Hindi and Marathi versions—which are required for use in the first year of the Intermediate courses are being published today

5 In the special position occupied by the Universities of the Madhya Pradesh, it has been necessary to publish these books both in Hindi and Marathi This has added to the labour and the cost involved At the same time it has given us a unique advantage we have here an opportunity of piloting an educational experiment in a regional language and at the same time in the language of the Union The inter action of the two parallel series of lectures and text books in the same University—and in many cases, in the same college—will, I am confident, prove valuable for the emergence of both Hindi and Marathi as more perfect media of higher education than they can claim to be at present

6 As regards the change of medium for the Intermediate Arts courses, this has already been brought into force from the academic year 1949 50 The proposal for preparation and publication of text books specially designed for

the needs of the University is still under the consideration of the authorities It was, however, thought desirable not to postpone the operation of the scheme in respect of the Arts courses as (i) the number of technical terms required for Arts is much smaller, as compared with those required for Science; and (ii) a certain number of text-books of the Intermediate Arts standard are already available, both for Hindi and Marathi. For certain subjects, glossaries of technical terms which will serve the preliminary needs of the teachers and the students have also been prepared by the University Boards of Studies. It is further hoped that it would soon be possible to adopt a scheme for preparation of text-books for Arts subjects also

7. At the transitional stage, the problem of teachers adequately qualified to give instruction through the Indian languages presents another hurdle. For reasons, both historical and geographical, the colleges of Madhya Pradesh have been fortunate in having on their staff teachers who, between themselves, can claim almost all the principal spoken languages of India as their mother-tongues. At the present stage,

however, this creates an immediate difficulty in re-organizing the teaching arrangements on the new basis The University is, however, confident that, where necessary, the teachers will avail themselves of the existing opportunities of acquiring a fairly good knowledge of the language of the Union or a language of their region and that the teachers and the management will, between themselves, so arrange the teaching programmes of colleges that the transition to the new media is made both smooth and effective

No formal test for imparting instruction through the new media has accordingly been prescribed by the University

8 The final shape of the cultural media of the new India will, after all, be moulded by that intellectual commerce between the teacher and the taught which we call University education The scheme of Nagpur University leaves the choice as between the Sanskritic technical terms and their equivalents to the teachers and the students themselves The text-books being published under the scheme give the new Sanskritic technical terms as well as their English equi-

valents and both teachers and students are, at the present stage, permitted to use either of them according to their convenience and requirements Adoption of this course cuts across the prevailing controversy with regard to the structure of technical terms and, at the same time, gives the newly coined terms an opportunity to be judged on their own merits along with their English competitors in the academic field

9 Progress in education requires both individual experiments and general planning, local initiative as well as central direction It would hardly be proper to be dogmatic about their order of priority and, in the case of a great linguistic transition at the University stage, the problem requires to be attacked on all fronts The Conference of Education Ministers and Vice Chancellors of India convened by the Ministry of Education in New Delhi in January, 1948, had recommended five years as the time limit within which Indian Universities should make the requisite preparations for commencing their instruction through the Indian languages The Indian Universities Commission has however, wisely left the determination of the duration

of the preparatory period to the interplay of the various educational and social factors that operate in Universities Adoption of such a course would leave each University freedom to regulate the pace of its linguistic progress according to its own needs, resources and limitations

10 Change in the medium of instruction at different dates in different Universities no doubt gives rise to fresh problems Each of these has, however, to be tackled by an intelligent and sympathetic administrative approach One of these difficulties evidently relates to the migration of students from one University to another —a process which, I hope will in the national interests, receive every encouragement in the future The difficulty in this respect, however, would not seem to be so formidable as it might appear at first sight, if we remember that (i) English text-books in each subject will be recommended along with the Hindi and Marathi text books for use of students, (ii) students and teachers will, for the present, be familiar both with the Hindi or Marathi terms and with their English equivalents, and (iii) English will continue to be a compulsory subject both for

the Intermediate and for the first degree courses in Arts and Science

The same considerations would seem to apply to the apparent difficulties in respect of All-India Competitive Examinations With the goodwill and determination shown by the builders of the new constitution of India, there is good reason for hoping that English may soon cease to be the sole medium for the All-India Competitive Examinations The institution of the language of the Union as the medium of instruction and examination in the Indian Universities should itself accelerate the pace of progress towards this transition

11 I venture to hope that this series of books will prove useful not only for the State of Madhya Pradesh, but also for other States in their efforts to adopt a regional language or the language of the Indian Union as the media of instruction at the University level The present effort is necessarily imperfect We can write good book in Hindi and Marathi only if we can do original thinking in Hindi and Marathi, as we do in English today Yet we can hope to do our thinking in Indian languages only when we have

Vidarbha Mahavidyalaya Amraoti), working in collaboration Some work in this direction had already been done by myself and Dr Braj Mohan of the Hindu University Banaras Shri Thosar wrote out the Marathi text on the basis of the material that he had collected in English It was next translated into Hindi by Shri R C Verma, M Sc, now lecturer in Mathematics, Mahakoshal Mahavidyalaya, Jabalpur Shri V K Mathur, M A., helped Shri R C Verma in finalising the Hindi version The two versions were carefully compared by Shri Shastri, Shri Thosar and Shri R C Verma Finally the book was submitted to the Board of Studies in Mathematics of the Nagpur University which recommended the book for the Intermediate examination

* * *

Sanskrit possesses a rich mathematical literature, which is replete with technical terms We have made free use of these ancient terms, though very often we had to restrict the use of one term to one specific meaning only The requirements of modern trigonometry are, however, not satisfied in their entirety by ancient terms Hence new terms had often to be evolved They are designed to be short, compact and significant For a clear understanding of the terms used in the present book, I am giving hereunder short word notes which, I hope would be found useful by teachers and students alike

त्रिकोणमिति is a Sanskrit facsimile of the European word tri gono metry *Tri* is Sanskrit त्रि कोण for Greek *gonia* is the commonest Indian word for angle त्रिकोण already occurs in the Mahabharata कोणस्पृष्ट of भास्कराचार्य

has been translated by Colebrooke as a 'circle in contact with the angles, an exterior circle one circumscribed *Metry* is मिति 'measurement', from Sanskrit root मा to measure

अंश 'numerator' and 'degree is an ancient word. Grade has to be distinguished from degree It is $\frac{1}{100}$th part of a right angle and thus smaller than a degree which is $\frac{1}{90}$ th part of a right angle It has been translated by अंशक smaller than an अंश, the suffix क denoting diminution

अक्ष has been used in Indian astronomy for 'terrestrial latitude' We have used the specific word अक्षवृत्त (cf विषुवद्वृत्त equator, देशान्तरवृत्त longitude) In our terminology अक्ष has been retained for 'axis

अधिकोण is an obtuse angle (अधि stands for अधिक i e an angle greater than a right angle Cf न्यूनकोण acute angle)

अनुपात proportion is an ancient word and is in wide use in Hindi Bengali, Marathi and other languages अनुपाती is proportional

अनुच्छेद article is already in use in Bengali It has also been used in the Hindi version of the Indian Constitution Etymologically अनु small + छेद section

अनुरेखण 'trace' i e, to copy by following (अनु) the lines (रेखा) is a denominative verb अनुरेखित traced

अपवर्त्य is used for multiple in Hindi and Bengali अपवर्तक is an ancient word in the sense of a common measure

अपवर्तन is reduction of a fraction to its lowest term

अयुग्म 'odd and युग्म 'even' are ancient words used as early as the शुल्बसूत्रs.

अर्हा 'value' is from √अर्ह् to deserve, to merit, to be worthy of

कनिष्ठ least Cf भूयिष्ठ maximum Both are ancient words

आदेश substitute It is well known to students of Sanskrit e.g पाणिनि—स्थानिवदादेशोऽनल्विधौ

आयत 'rectangle is an ancient word and is also in common use in Hindi, Bengali and other Indian languages

आयाम 'length is an ancient word

अर is the spoke of a wheel hence a radius From अर is derived आर radian i.e a central angle subtended in a circle by an arc whose length is equal to the radius of the circle Radian when used as an adjective would be आरीय

आवर्तकाल, आवर्त period आ + √वृत् to turn round

ज्या is the parent of sine ज्या 'sine of an arc has been used in the सूर्यसिद्धान्त 11 57 कोटिज्या 'cosine is also from the सूर्यसिद्धान्त There it signifies the cosine of an angle in a right angled triangle

उत्क्रमकोटिज्या coversed sine उत्क्रम is versed or reversed, कोटिज्या cosine

उच्छ्रय and उच्चता have been specifically used for altitude and height respectively Both are ancient words

ऊर्ध्व is an ancient word, 'point upwards hence 'vertical

उपसाध्य corollary, साध्य proposition A corollary is a proposition requiring no additional proof following upon one just demonstrated

उपसादन to bring near, उपसन्न brought near, approximate उभयसाधारण common to both

धन positive and ऋण negative धन in the sense of an affirmative quantity or plus and ऋण in that of a negative quantity or minus are ancient words

एकक unit ('a single thing, as a magnitude or number regarded as an undivided whole) It is used in this sense in Bengali (see Guha's Modern Anglo Bengali Dictionary)

ऐकात्म्य identity, from एकात्म identical

कर्ण 'hypotenuse of a triangle is an ancient word

कला 'minute occurs in सूर्यसिद्धान्त and other works

काष्ठिका a second has been derived from काष्ठा which is $\frac{1}{30}$th of a कला (see Manu I 64) काष्ठिका is smaller than a काष्ठा

विकला stands for the second of a degree in सूर्यसिद्धान्त

स्पर्शज्या (abbreviated to स्पज्या) is tangent when it is the portion (of the straight line tangent to a curve) between the point of tangency and a given line In the sense of a tangent line or curve it is स्पर्शरेखा or simply स्पर्श

क्रोशक mile In ancient literature the common क्रोश is of the length of 4000 हस्तs i e 6000 feet, a हस्त being $1\frac{1}{2}$ feet A mile (5280 feet) is shorter than a क्रोश (क is added to क्रोश to signify diminution)

क्षितिज 'horizon', occurs in आर्यभट and सूर्यसिद्धान्त. It is also widely used in Hindi, Bengali, Marathi, etc क्षैतिज is horizontal

क्षेत्रफल area The word is used in the गोलाध्याय and कात्यायन-श्रौतसूत्र as meaning the superficial contents of a figure It is current in Hindi, Bengali, etc फल is also used by आर्यभट for area of a figure Thus स्फुटफल occurs for distinct or precise area (of a triangle, etc).

घात 'power', is widely used in Hindi It is an ancient word It is from √हन् to multiply.

चरण quadrant It is an ancient word and signifies a fourth part

चाप 'arc' is from सूर्यसिद्धान्त

छेदा logarithm According to नेमिचन्द्र the Jain author of त्रिलोकसार if $x=2^n$ then n is called the अर्धच्छेद of x छेद is the number of times a particular number can be divided by a base If $64=4^3$ then 3 represents the number of times that 64 can be divided by 4 Literally छेद is cutting and the number of times that the division can take place is छेदसंख्या or simply छेदा In $64=4^3$, 3 is the log of 64 to the base 4 दशच्छेदा common logarithm दशच्छेदापद्धति common system of logarithms, i.e., logarithms having 10 for their base Its complete translation would be दशाधारछेदा. For brevity दशच्छेदा has been used instead

द्विसमत्रिभुज isosceles triangle Latin *isosceles* is from Greek *isoskeles*, *isos* equal + *skelos* leg In geometry it is a triangle having two equal sides It is a significant but unintelligible word द्विसमत्रिभुज is in comparison

simplicity itself. It is a त्रिभुज three-sided figure, द्वि two of the sides being सम equal.

द्विघात समीकार quadratic equation. Quadratic is an adjective from quadrate 'square'. In a quadratic equation समीकार the highest power घात of the unknown quantity is a square द्वि.

दशमिक decimal. दशमलव is widely used in Hindi for decimal. Here is visible an attempt to have a phonetic approximation to the English word. But लव meaning a part is not required after दशम, as दशम itself means the tenth part. Decimal is derived from L. *decimus*, 'tenth' from *decem* 'ten' + *-al*, of which the exact Indian equivalent will be दशमिक (दशम tenth + -इक). In Bengali दशमिक is already current (see Guha's Modern Anglo Bengali Dictionary).

दशमिकांश mantissa. This word is believed to be of Etruscan origin. The Indian word is crystal clear while the English word is perfectly opaque. In Latin it meant an addition, make-weight. It has gone out of use in general English where it meant an addition of little value. In mathematics it denotes the decimal दशमिक part अंश of a common logarithm.

ध्रुव pole. ध्रुव in the सूर्यसिद्धान्त signifies a celestial pole. It is widely used in all important Indian languages.

ध्रुववृत्त meridian. Meridian is a great circle वृत्त on the surface of the earth, passing through the poles ध्रुव and any given place. ध्रुववृत्त is short for ध्रुवान्तर्गामी वृत्त

निर्मेय problem. A problem is a proposition requiring an operation to be performed or a construction निर्माण to be made. Literally निर्मेय is that which is to be

constructed Cf प्रमेय theorem

निष्पत्ति 'ratio' is used not only in Hindi but in Bengali and elsewhere (e g , see the Modern Anglo Bengali Dictionary by Charuchandra Guha)

न्यास for data is widely used in our astronomical literature Etymologically it is that which has been put down नि+अस् to serve as a basis for mathematical investigation Literally data or its singular datum would be दत्त 'given'

न्यूनकोण acute angle It is less than a right angle Cf अधिककोण obtuse angle

परि circum परि as a prefix implies round, around, about Circum is used adverbially to signify around, about, on all sides Cf परिकेन्द्र circumcenter, परित्रिज्या circumradius, परिलेखन circumscribe, परिवृत्त circumcircle

परिमाप perimeter, the whole outer boundary or measure माप of a body or figure

पाद foot पद and पाद both mean foot The English word is historically a descendant of the Sanskrit word As a measure पाद has been used in the शतपथब्राह्मण, in the श्रौतसूत्रs and elsewhere Like all other measures in ancient times it must have varied slightly from place to place There are two measurements given for पाद one is 12 अङ्गुलs and the other is 15 अङ्गुलs (कात्यायनश्रौतसूत्र) The second measurement is approximately 11¼" In modern times the foot is a fixed measurement of 12 inches It was used extensively for measuring land On the European Continent, the foot, now largely replaced by metric units, varies locally between 11 and 14 inches It is interesting to note that as in India the पाद was subdivided

into 12 angulas so in the English system also the foot is subdivided into 12 parts, the inches Only an inch is slightly bigger than an अंगुल (and hence our word आंगुल for inch) An inch was originally divided into three parts called barley corns, whose length was declared by a statute apparently of 17 Edw II given in the Cottonian Manuscripts (Claudius D 2) to be that of three grains of barley, dry and round, placed end to end lengthwise.

पादांक suffix It is an अंक or figure at the foot. Suffix or sub index is a character affixed below to a symbol, to distinguish it in its class. Cf मूर्धांक superscript

पूर्णांक integer The Indian term is quite clear in its meaning and is more readily intelligible than its English equivalent पूर्णांक for integer, is used in Hindi, Bengali, etc

प्रचय common difference It is an ancient word

प्रति stands for anti प्रति घटीवत् is anti clockwise from घटीवत् clockwise वामावर्त and दक्षिणावर्त are ancient words and can be used as alternatives

प्रतिबन्ध condition Condition is that which limits or modifies the existence or character of something, a restriction or qualification The word is used in Hindi

प्रतीक symbol occurs as early as the छान्दोग्य उपनिषद्.

प्रतीप inverse, literally 'against प्रति the stream अप्

प्रनियम principle प्रनियम = प्रथमनियम Principle is a comprehensive law or doctrine from which others are derived or on which others are founded, an elementary proposition or fundamental assumption The use of प्र in the sense of first is well-known Cf. प्रकृति the original or

primitive substance. प्रथम (प्र+तम) itself is a superlative of प्र.

प्रमेय for theorem isin use in several languages. Guha's Anglo-Bengali Dictionary gives प्रमेयोपपाद. प्रमेय is that which is to be established by प्रमाण or proof. Cf. निर्मेय problem.

प्रांगुल inch_(see under पाद foot).

फल 'result' is from पंसिद्धान्त (the result of a calculation, product or quotient, etc.).

बहिर्लेखन escribe. बहिर्लिखित escribed. बहिर्लेखन is to write (or draw) externally. Escribe is to draw (a circle) touching one side of a triangle externally. बहिर्वृत्त excircle, बहिष्कोण exterior angle, बहिष्केन्द्र excentre.

बिन्दुरेख graph. बिन्दुरेख is literally dots and lines. A graph is a diagram symbolising a system of interrelations by *spots* (बिन्दु), all distinguishable from one another and some connected by *lines* (रेखा) of the same kind.

बिम्ब 'disc' is an ancient word.

भागफल quotient. Quotient is literally 'how many times'. It is the number resulting फल from the division भाग of one number by another. भागफल is current in Hindi and Bengali. लीलावती gives फल, which we have already retained for result in general. Other ancient words for quotient are भाग, लब्धि, अप्त, आप्ति, अवाप्त, अवाप्ति, लब्ध

भिन्न 'fraction' is from लीलावती It is widely used in ancient Indian mathematics; some of its compounds are भिन्न-संकलन addition of fractions, भिन्न-गुणन multiplication of fractions, भिन्न घन the cube of a fraction, भिन्न भाग हर division of fractions (लीलावती).

भुज meaning the side of any geometrical figure has been used as early as कात्यायन श्रौतसूत्र

मिथश्छेदन intersect Intersect is to cut छेद into one another मिथ

यथार्थ exact Cf सुतथ्य precise, शुद्ध correct, परिशुद्ध accurate

योग 'addition is from सूर्यसिद्धान्त Cf वियोग 'subtraction' from गणिताध्याय

राशि 'quantity, an ancient word, is current in Hindi, Bengali, etc

रैखिकी geometry रेखागणित is in common use रैखिकी is short for रैखिकी विद्या the science pertaining to lines or the science of lines Similarly प्राणिकी = प्राणिकी विद्या zoology, औद्भिदी = औद्भिदी विद्या botany

Naming of sciences was as varied in ancient days, as it is today in the European languages Sometimes abstract nouns were used as परचित्तज्ञता Chemistry, surgery are European examples of abstract nouns as names of sciences In the names of arts and crafts, some word denotative thereof was suffixed— मधूच्छिष्टकृतम् wax modelling (मधूच्छिष्ट wax) सूचीकर्म needle work, मणिभूमिकाकर्म gem mosaic work Sometimes the word denotative of art and craft was left out as in मणिराग colouring of precious stones The general action noun करण has been used in शुक्रनीतिसार in धातु सांकर्य पार्थक्य करणम् the art of combination and isolation of minerals

कर्म standing for art was sometimes dropped particularly where the preceding word was itself a compound It was usual to transfer the neuter gender of कर्म to

the compound which was a sort of adjective made to serve as a noun. We have a beautiful example in the सभापर्व, ५.१९, उदकमूत्रिकम्. The use of adjectives for naming sciences also became common, e g, सांख्यम्, वैशेषिकम्, ऐन्द्रजालिकम्.

As for arts and crafts the general term कर्म was a neuter noun, so for different branches of knowledge there was the general term विज्ञानम्. शुक्रनीतिसार mentions धातूनां संयोगपूर्वविज्ञानम् 'knowledge of new combinations of minerals', and काचपात्रादिकरणविज्ञानम् 'knowledge of making glass utensils'.

From the most ancient times we read of numerous विद्याs or sciences The परा and अपरा विद्या of the उपनिषद्s are well known Again, adjectival forms with feminine endings, originally intended to be followed by विद्या, have been used in the same way as the neuter उदकमूत्रिकम् मानसी thus is the science of the mind त्रयी, वार्ता, आन्वीक्षिकी are well known from the अर्थशास्त्र of Kautalya रामचन्द्र in his commentary on the first verse of लक्ष्मणकवि, a continuation of चम्पूरामायण of विदर्भराज, mentions two sciences अदृश्यकरणी and दूरदर्शनी The commentators of श्रीमद्भागवत, such as श्रीधर, record वनयिकी विद्या, वैनयिकी विद्या, व्यायामिकी विद्या वैतालिकी विद्या

The adjectival suffix *ic* in English (ultimately derived from Skt इक through Greek *ikos*, Latin *icus* and French *ique*) has been similarly used Greek or Latin nouns that were originally adjectives used substantively have been adopted into English, as arithmetic, music, logic, etc Since 1600 A D the

plural form *ics* has been used instead to denote names of sciences as in physics, mathematics, politics, athletics, economics This was probably in imitation of the Greek *ta phusika, ta ethika* It is further interesting to note that these plural forms are now construed as singulars. In French and German the singular is still used in the names of sciences, e g, *die Physik*, *die Politik* in German and *la physique, la politique* in French

लम्ब 'perpendicular' is an ancient word Other words used in ancient works are अवलम्ब (लीलावती), अवलम्बक, अधोलम्ब, आलम्ब, लम्बक, कोटि (the perpendicular side of a right angled triangle, सूर्यसिद्धान्त) Compounds from लम्ब are समलम्ब having equal perpendicular, अन्तर्लम्ब a triangle in which the perpendicular falls within, etc

लम्बकेन्द्र orthocentre Orthocentre is the common intersection of the three altitudes of a triangle, or of the four altitudes of a tetrahedron provided these latter meet in a point

लम्बकोण right angle i.e, the angle कोण made by a perpendicular लम्ब In Hindi and Bengali समकोण is sometimes used for a right angle It is not a happy word because सम means equal

लम्बपूर (कोण) complementary (angle) लम्बपूर is short for लम्बकोणपूरक that which completes पूरक a right angle लम्बकोण

वक्र 'curve is an ancient word

वर्ग square, वर्गमूल square root In ancient usage वर्ग is the square of a number, e g., पञ्चवर्ग square of five भिन्नवर्ग square of a fraction वर्ग and वर्गमूल are widely current in Hindi, Bengali, Marathi, etc

वर्तुल 'circular' is an ancient word It is from √वृत् to turn, to revolve Cf. वृत्त a circle

विकोणमान theodolite Theodolite is an instrument for measuring horizontal and usually also vertical angles विकोणमान is literally an instrument which measures मान angles कोण of various kinds वि, वि being short for विविध

विकर्ण diagonal In ancient mathematics कर्ण has been used for hypotenuse and diagonal both कर्ण has been retained by us for hypotenuse, while the specificatory prefix वि (here short for विशेष) has been added to कर्ण to designate a diagonal

वियुत minus It is from ब्रह्मसिद्धान्त

वियोग 'subtraction' is from गणिताध्याय Cf योग addition.

विषम 'odd, is from बृहज्जातक of वराहमिहिर Also current in *Hindi, Marathi, Bengali, etc*

वैकल्पिक 'alternative is an ancient word It is used in Hindi, Bengali, etc

व्यञ्जक expression is the current Marathi word and is also an ancient usage

व्यास 'diameter is from Vedic शुल्वसूत्र

व्युत्क्रम reciprocal It is an ancient word meaning inverted order, so is the reciprocal of a function In Latin 'reciprocal is turning backward and forward

वृत्त '*circle is from* गणिताध्याय *It is current in many* Indian languages

शकल sector (part of a circle) शकल means a fragment, piece or bit In कादम्बरी of Bāṇa occurs the expression चन्द्र शकल

शतिक centesimal शतिक 'hundredth' occurs in वराहमिहिरs बृहत्संहिता

शतिमान centimeter Meter is from Latin *mensus* to measure, akin to Greek *metron* a measure, ultimately from Sanskrit √मा to measure In English meter has two senses (1) That which measures, an instrument or an apparatus, e g, barometer, thermometer In this sense it is usually a suffix (2) A unit of length Its Indian counterpart is मान As a suffix it has been used in वर्षमान (कौटल्य अर्थशास्त्र) an instrument for measuring rainfall When standing by itself it has been used as a general word expressing measure as well as particular measures e g according to the commentator of तैत्तिरीयसंहिता and कात्यायन श्रौतसूत्र 100 मानs make 5 पदs or पण.

The word मान can be made to cover both the usages of meter viz (1) मान, meter, as the unit of length, and (2) मान as a suffix denoting a measuring instrument, e g, तापमान thermometer

Meter is subdivided into decimeter, centimeter, millimeter etc Their Indian equivalents would be दशिमान, शतिमान, सहस्रिमान, etc Similarly for decameter hectometer, kilometer, etc, which are its multiples the Indian equivalents would be दशमान, शतमान, सहस्रमान, etc (For the complete series see our tables of Weights and Measures, appended to the Great English Indian Dictionary)

शिरोदण्ड or शिरोधार bar = vinculum शिरोदण्ड or शिरोधार the bar at the top Vinculum is a straight horizontal mark placed over two or more members of a compound.

शिरोबिंदु vertex In any figure having a base it is the point बिंदु opposite to and farthest from, the base, the top शिरस्

शून्य zero It occurs in such works as गणिताध्याय and वराहमिहिर's बृहत्संहिता From it are derived Gk *lenos*, *lenoos*, *lennos*, etc That the conception of zero is essentially Indian is now well known According to the Encyclopaedia Britannica, the Sanskrit term शून्य passed into Arabic as *assifra*, from which are derived Italian, French and English *zero*

श्रित function This term is used mostly to point out dependance on some certain variable or variables' Mathematics Dictionary by Glenn James and R C James It is the past participle form from √श्रि to depend on. आश्रय is from the same root

श्रेढी 'progression is an ancient word meaning a particular numerical notation or progression of figures

षडंश sextant Sextant is the sixth part of a circle It occurs as early as पाणिनि

षाष्टिक sexagesimal meaning pertaining to or founded on the number sixty षाष्टिक is the adjectival form of षष्टि sixty

सचापारकोण radian Radian is an angle कोण subtended by an arc चाप equal सं in length to the radius अर

संपतन or संपात coincidence The English word is derived from Latin *coincidere*, from *co* + *incidere* to fall on संपतन = सं together + पतन falling

संवादी 'corresponding is an ancient word (e g in वाक्यपदीय) Literally it means conversing with, hence agree

ing or harmonizing with The English word 'correspond' (com- + respond) etymologically means 'to answer to' from which are derived its figurative senses 'to answer in fitness, character, function, amount'

संस्पर्श contact Contact is from Latin *con-tactus* to touch on all sides. संस्पर्श = सं mutual, close + स्पर्श touch.

सत्यापन 'verification' is an ancient word. The verbal form is सत्यापयति verifies.

सदिश vector. Vector (from Latin *vehere*, *vectum* to carry) is a complex entity representative of a directed magnitude. सदिश means 'having a direction दिशा'. Our word is clearer and will be more easily understood by the Indian students.

समांग homogeneous, uniform. Homogeneous is alike in nature and therefore, comparable in parts (सम alike + अंग parts)

समान्तर श्रेढी arithmetic progression गुणोत्तर श्रेढी geometric progression. Arithmetic progression — a progression श्रेढी whose elements progress by a constant (सम same) difference अन्तर (positive or negative) as 1, 3, 5, 7 or a, a ± d, a ± 2 d, a ± 3d. 'Arithmetic progression' is not a very intelligible expression Geometric progression is 'that in which elements progress by a constant factor, as 1, 2, 4, 8, 16, any term is obtained by multiplying the preceding one by the constant factor'. गुणोत्तर श्रेढी — गुण multiplication उत्तर successive, श्रेढी progression.

सरलन simplify. सरलन is a nominal verb (नामधातु) from सरल simple

सर्वाङ्गसम congruent सर्वाङ्गसम (सर्व+अङ्ग+सम) equal in all parts Congruent is from Latin to come together coincide agree In geometry it means superposable so as to be coincident throughout For us सर्वाङ्गसम is simpler and more expressive than congruent

साद्यन्त throughout साद्यन्त(स with+आदि beginning+अन्त end) It is prevalent in this sense in Hindi and Marathi

सामि The Latin prefix *semi* akin to Greek *hemi* is related to Sanskrit सामि It is combined chiefly with adjectives and nouns meaning half Cf semiperimeter सामि परिमाप

सारणी table सारणी is from √सृ to run the word originally means a running stream. Table signifies any collection and arrangement (generally in parallel columns) in a condensed form for ready reference of many particulars or values as of weights measures, etc सारणी covers the meaning of the word table as implied by its running character The word is in common use among the astronomers of India

समायत square (figure) समायत is an आयत or rectangle with all the sides सम or equal In Hindi वर्ग is used to denote a square figure as well as the product of a number or quantity multiplied by itself We have retained वर्ग for the latter sense and समायत for the former

सीमान्त in the limit सीमान्ते is the Sanskrit locative singular form from सीमान्त limit In Hindi it can also be expressed by सीमान्त पर

स्पर्श्या tangent is short for स्पर्शज्या

स्थिरांक constant is a magnitude that is supposed not to change its value in a certain discussion or stage of

investigation The adding of अच to स्थिर makes the Indian word clearer

हर 'denominator' is an ancient word It is derived from √ हृ to take away, i e to divide

* * *

During the course of last three years, I have had the privilege of enjoying the kind sympathy of the Hon ble Pt Ravi Shankar Shukla the Chief Minister of Madhya Pradesh To the Hon ble D K Mehta, my debt of gratitude is immense It is he who, as the Finance Minister of the State, set the ball rolling The Hon ble Pandit Dwarka Prasad Mishra with his unbounded love for Hindi has been taking personal interest and has gone so far as to establish a special department for the purpose of establishing Hindi and Marathi as the languages of this State To Lt Col N Ganguli, the Education Secretary in 1947 48 and his successor Dr V S Jha, I am indebted, for giving top priority to my requirements Since the establishment of the Languages Department in January, 1950, Shri A R Deshpande, the Under Secretary, has been extending to me his whole-hearted cooperation

My very special thanks are due to Lt Col Kunjilal Dubey, the Vice Chancellor of the Nagpur University It is due to his love for Hindi and Marathi that the Nagpur University is leading India in the matter of introducing Hindi and Marathi as the media of instruction It was again due to him that the Nagpur University

has taken the heavy responsibility upon itself of publishing the text books that were prepared under the orders of the Government of Madhya Pradesh

Lastly my thanks are due to my colleagues, the authors of the text books, who have been with me for the last three years They have worked devotedly, fully convinced of the service that they are rendering to the nation They have considered their work to be their reward

Raghu Vira

The title page preface and introduction have been printed at the Aryabharati Press, Nagpur.

प्रस्तावना

मध्यप्रदेश सरकारच्या सूचनेप्रमाणें मी प्रस्तुत पुस्तक लिहावयास घेतलें. या पुस्तकांत वापरलेले पारिभाषिक शब्द आचार्य डॉ. रघुवीर यांनी दिले आहेत. त्यांनी सतत दिलेल्या उत्तेजनामुळेंच हें पुस्तक अशा रूपांत लिहिलें गेलें. पुस्तक शक्य तितकें निर्दोष आणि परिपूर्ण करण्याचा प्रयत्न केला आहे. ठिकठिकाणी नमुन्यादाखल उदाहरणें सोडविलीं आहेत व शक्य असेल तेथें प्रमेयें व उदाहरणें यांकरितां अन्य रीती दिल्या आहेत; म्हणून हें पुस्तक विद्यार्थ्यांना विशेष उपयुक्त वाटेल असा भरवंसा वाटतो.

जबलपूरच्या महाकोशल महाविद्यालयांतील गणिताचे प्राध्यापक श्री नी. आ. शास्त्री यांनी वेळोवेळी उपयुक्त सूचना केल्या याबद्दल मी त्यांचा आभारी आहे. तसेंच, श्री. वी. के. पराडकर एम्. एस्सी. यांनी कांही उदाहरणें जमविण्यात मदत केली, डॉ. वि. भि. कोलते यांनी हें पुस्तक भाषेच्या दृष्टीने वाचून पाहिलें आणि श्री. रमेशचंद्र वर्मा एम्. एस्सी. यांनी या पुस्तकाचा हिंदीमध्यें अनुवाद केला याबद्दल मी या सर्वांचा आभारी आहे.

य. वि. ठोसर

अनुक्रमणिका

सम्मतल
त्रिकोणमिति

त्रिकोणमितीतील महत्त्वाचीं सूत्रें व फलें

(important formulae and results in trigonometry)

१. वृत्ताचा परिघ = २ प्या त्र

प्या = ३·१४१५९ ....

$= \frac{२२}{७}$ जवळजवळ

$\frac{१}{प्या}$ = ·३१८३१ ....

१ आर = ५७° १७' ४४·८" जवळजवळ

१ लंबकोण = ९०° = १००^{अ} = $\frac{प्या}{२}$ आर

कोणाचें आरीय माप = $\frac{चाप}{त्रिज्या}$

२. व्युज्ज्या अ = $\frac{१}{ज्या अ}$

व्युत्कोज्या अ = $\frac{१}{कोज्या अ}$

कोस्प अ = $\frac{१}{स्प अ}$

$\text{ज्या}^{2}\text{अ} + \text{कोज्या}^{2}\text{अ} = १$

$\text{व्युत्कोज्या}^{2}\text{अ} = १ + \text{स्प}^{2}\text{अ}$

$\text{व्युज्ज्या}^{2}\text{अ} = १ + \text{कोस्प}^{2}\text{अ}$

$\text{स्प अ} = \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}}$

$\text{कोस्प अ} = \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}}$

३. $\text{ज्या}०^{\circ} = ०$, $\text{कोज्या}०^{\circ} = १$, $\text{स्प}०^{\circ} = ०$

$\text{ज्या } ३०^{\circ} = \frac{१}{२}$, $\text{कोज्या } ३०^{\circ} = \frac{\sqrt{३}}{२}$, $\text{स्प}३०^{\circ} = \frac{१}{\sqrt{३}}$

$\text{ज्या } ४५^{\circ} = \frac{१}{\sqrt{२}}$, $\text{कोज्या } ४५^{\circ} = \frac{१}{\sqrt{२}}$, $\text{स्प } ४५^{\circ} = १$

$\text{ज्या } ६०^{\circ} = \frac{\sqrt{३}}{२}$, $\text{कोज्या } ६०^{\circ} = \frac{१}{२}$, $\text{स्प } ६०^{\circ} = \sqrt{३}$

$\text{ज्या } ९०^{\circ} = १$, $\text{कोज्या } ९० = ०$, $\text{स्प } ९०^{\circ} = \infty$

$\text{ज्या } १५^{\circ} = \frac{\sqrt{३} - १}{२\sqrt{२}}$, $\text{कोज्या } १५^{\circ} = \frac{\sqrt{३} + १}{२\sqrt{२}}$,

$\text{स्प } १५^{\circ} = २ - \sqrt{३}$

$\text{ज्या } ७५^{\circ} = \frac{\sqrt{३} + १}{२\sqrt{२}}$, $\text{कोज्या } ७५^{\circ} = \frac{\sqrt{३} - १}{२\sqrt{२}}$

$\text{स्प } ७५^{\circ} = २ + \sqrt{३}$

$$\text{ज्या } १८^\circ = \frac{१}{४}(\sqrt{५}-१), \text{ कोज्या } ३६^\circ = \frac{१}{४}(\sqrt{५}+१),$$

$$\lim_{\text{अ}\to ०} \frac{\text{ज्या अ}}{\text{अ}} = १, \quad \lim_{\text{अ}\to ०} \text{कोज्या अ} = १, \quad \lim_{\text{अ}\to ०} \frac{\text{स्प अ}}{\text{अ}} = १$$

४. ज्या (−अ) = −ज्या अ, कोज्या (−अ) = कोज्या अ

ज्या (९०° − अ) = कोज्या अ,

कोज्या (९०° − अ) = ज्या अ

ज्या (९०° + अ) = कोज्या अ,

कोज्या (९०° + अ) = −ज्या अ

ज्या (१८०° − अ) = ज्या अ,

कोज्या (१८०° − अ) = −कोज्या अ

ज्या (१८०° + अ) = −ज्या अ,

कोज्या (१८०° + अ) = −कोज्या अ

५. जर ज्या अ = ज्या इ, तर अ = सं प्या ± $(-१)^{\text{स}}$ इ

जर कोज्या अ = कोज्या इ, तर अ = २स प्या ± इ

जर स्प अ = स्प इ, तर अ = स प्या + इ

६. ज्या (क + ख)

= ज्या क कोज्या ख + कोज्या क ज्या ख

कोज्या (क+ख)

$= $ कोज्या क कोज्या ख $-$ ज्या क ज्या ख

$$\text{स्प } (\text{क}+\text{ख}) = \frac{\text{स्प क} + \text{स्प ख}}{१ - \text{स्प क स्प ख}}$$

ज्या (क $-$ ख)

$= $ ज्या क कोज्या ख $-$ कोज्या क ज्या ख

कोज्या (क $-$ ख)

$= $ कोज्या क कोज्या ख $+$ ज्या क ज्या ख

$$\text{स्प } (\text{क}-\text{ख}) = \frac{\text{स्प क} - \text{स्प ख}}{१ + \text{स्प क} \times \text{स्प ख}}$$

७. २ ज्या क कोज्या ख $=$ ज्या (क$+$ख) $+$ ज्या (क $-$ ख)

२ कोज्या क ज्या ख $=$ ज्या (क$+$ख) $-$ ज्या(क $-$ ख)

२ कोज्या क कोज्या ख $=$ कोज्या (क$+$ख) $+$ कोज्या (क $-$ ख)

२ ज्या क ज्या ख $=$ कोज्या (क $-$ ख) $-$ कोज्या (क$+$ख)

$$\text{ज्या ग} + \text{ज्या घ} = २\text{ज्या}\frac{\text{ग}+\text{घ}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{ग}-\text{घ}}{२}$$

$$\text{ज्या ग} - \text{ज्या घ} = २ \text{ कोज्या } \frac{\text{ग}+\text{घ}}{२} \text{ ज्या } \frac{\text{ग}-\text{घ}}{२}$$

$$\text{कोज्या ग} + \text{कोज्या घ} = २\text{कोज्या}\frac{\text{ग}+\text{घ}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{ग}-\text{घ}}{२}$$

$$\text{कोज्या ग} - \text{कोज्या घ} = \text{२ज्या}\frac{\text{ग}+\text{घ}}{\text{२}}\ \text{ज्या}\ \frac{\text{घ}-\text{ग}}{\text{२}}$$

८. $\text{ज्या २ क} = \text{२ ज्या क कोज्या क}$

$$\text{कोज्या २ क} = \text{कोज्या}^{\text{२}}\text{क} - \text{ज्या}^{\text{२}}\text{क} = \text{२ कोज्या}^{\text{२}}\ \text{क} - \text{१}$$

$$= \text{१} - \text{२ज्या}^{\text{२}}\text{क}$$

$$\text{स्प २ क} = \frac{\text{२ स्प क}}{\text{१} - \text{स्प}^{\text{२}}\text{क}}$$

$$\text{ज्या ३क} = \text{३ज्या क} - \text{४ ज्या}^{\text{३}}\text{क}$$

$$\text{कोज्या ३क} = \text{४ कोज्या}^{\text{३}}\text{क} - \text{३कोज्या क}$$

$$\text{स्प ३ क} = \frac{\text{३स्प क} - \text{स्प}^{\text{३}}\text{क}}{\text{१} - \text{३स्प}^{\text{२}}\text{क}}$$

९. $\text{ज्या क} = \text{२ ज्या}\frac{\text{क}}{\text{२}}\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{क}}{\text{२}}$

$$\text{कोज्या क} = \text{कोज्या}^{\text{२}}\frac{\text{क}}{\text{२}} - \text{ज्या}^{\text{२}}\frac{\text{क}}{\text{२}} = \text{२कोज्या}^{\text{२}}\ \frac{\text{क}}{\text{२}} - \text{१}$$

$$= \text{१} - \text{२ज्या}^{\text{२}}\frac{\text{क}}{\text{२}}$$

$$\text{स्प क} = \frac{\text{२स्प}\frac{\text{क}}{\text{२}}}{\text{१} - \text{स्प}^{\text{२}}\frac{\text{क}}{\text{२}}}$$

$$\text{ज्या क} = \frac{\text{२स्प}\frac{\text{क}}{\text{२}}}{\text{१} + \text{स्प}^{\text{२}}\frac{\text{क}}{\text{२}}}$$

$$कोज्या\ क = \frac{१ - स्प^{२}\frac{क}{२}}{१ + स्प^{२}\frac{क}{२}}$$

$$१ - कोज्या\ क = २ज्या^{२}\ \frac{क}{२}$$

$$१ + कोज्या\ क = २कोज्या^{२}\ \frac{क}{२}$$

$$\frac{१ - कोज्या\ क}{१ + कोज्या\ क} = स्प^{२}\ \frac{क}{२}$$

१०. $\frac{ज्या\ क}{का} = \frac{ज्या\ ख}{खा} = \frac{ज्या\ ग}{गा}$

$कोज्या\ क = \frac{खा^{२} + गा^{२} - का^{२}}{२\ खा\ गा}$,......इत्यादि

$का = खा\ कोज्या\ ग + गा\ कोज्या\ ख$,......इत्यादि

$ज्या\ \frac{क}{२} = \sqrt{\frac{(सा - खा)(सा - गा)}{खा\ गा}}$,......इत्यादि

$कोज्या\ \frac{क}{२} = \sqrt{\frac{सा\ (सा - का)}{खा\ गा}}$,......इत्यादि

$स्प\ \frac{क}{२} = \sqrt{\frac{(सा - खा)(सा - गा)}{सा\ (सा - का)}}$,......इत्यादि

$ज्या\ क = \frac{२}{खा\ गा}\sqrt{सा\ (सा - का)(सा - खा)\ (सा - गा)}$,

......इत्यादि

$$\text{स्प}\left(\frac{\text{ख}-\text{ग}}{२}\right)=\left(\frac{\text{खा}-\text{गा}}{\text{खा}+\text{गा}}\right)\text{कोस्प}\frac{\text{क}}{२}$$,.......इत्यादि

११. $\Delta=\frac{१}{२}\cdot\text{खा गा ज्या क}=\frac{१}{२}\text{ गा का ज्या ख}$

$$=\frac{१}{२}\text{ का खा ज्या ग}$$

$$=\sqrt{\text{सा (सा}-\text{का)(सा}-\text{खा)(सा}-\text{गा)}}$$

$$\text{त्रा}=\frac{\text{का}}{\text{२ज्या क}}=\frac{\text{खा}}{\text{२ज्या ख}}=\frac{\text{गा}}{\text{२ज्या ग}}=\frac{\text{काखागा}}{४\Delta}$$

$$\text{त्र}=\frac{\Delta}{\text{सा}}=(\text{सा}-\text{का})\text{स्प}\frac{\text{क}}{२}=(\text{सा}-\text{खा})\text{स्प}\frac{\text{ख}}{२}$$

$$=(\text{सा}-\text{गा})\text{स्प}\frac{\text{ग}}{२}=४\text{त्रा ज्या}\frac{\text{क}}{२}\text{ज्या}\frac{\text{ख}}{२}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२}$$

$$\text{त्र}_१=\frac{\Delta}{\text{सा}-\text{का}}$$

$$=\text{सास्प}\frac{\text{क}}{२}=४\text{त्रा ज्या}\frac{\text{क}}{२}\text{कोज्या}\frac{\text{ख}}{२}\text{कोज्या}\frac{\text{ग}}{२}$$

१२. वृत्तीय चौकोणाचें क्षेत्रफळ

$$\sqrt{\text{(सा}-\text{का)(सा}-\text{खा)(सा}-\text{गा)(सा}-\text{घा)}}$$

वृत्ताचें क्षेत्रफळ $=\text{प्या त्र}^२$

१२. $छे_{क}मन = छे_{क}म + छे_{क}न$

$$छे_{क}\frac{म}{न} = छे_{क}म - छे_{क}न$$

$$छे_{क}म^{न} = न\, छे_{क}म$$

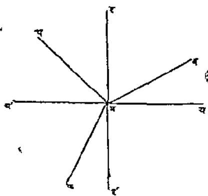
$$छे_{क}म = छे_{ख}म \times छे_{क}ख$$

प्रकरण १ लें

कोणमापन

१.१ त्रिकोणमितींतील कोण.

दोन सरळ रेषांच्या छेदनानें कोण निर्माण होतो व त्याचें मान (value) नेहमी 0° व 360° यामध्ये असतें हें आपण रेखाकींत (geometry) पाहिलेंच आहे. हे कोण सदा धन (positive) समजले जातात. त्रिकोणमितींत (trigonometry) कोणाची कल्पना अधिक व्यापक घेतली आहे.



अ १.१

समजा मय ही रेषा एकाच समतलांत (plane) म बिंदूभोंवती फिरूं शकते. मय या आदिम स्थितींतून (initial position) निघून आणि प्रतिघटीवत् (anticlockwise) परिभ्रमण (revolution) करून ती मप या स्थितींत येते. मय या आदिम स्थितीपासून

$$\text{आणि } १^{\text{अं}} = \left(\frac{९}{१०}\right)^{\circ}$$

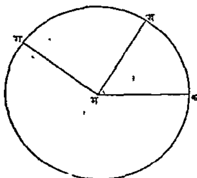
उदाहरण १— शतिक मापांत व्यक्त करा.

(१) ४१°२२'३९" (२) १५°३२'५१"

उदाहरण २— षाष्टिक मापांत व्यक्त करा.

(१) $७९^{\text{अं}}$४३'६७" (२) $८७^{\text{अं}}$१३'५५"

१.३ आरीय (radian) अथवा वर्तुल (circular) माप. कोणत्याहि वृत्ताच्या (circle) त्रिज्येएवढ्या लांबीच्या चापाने (arc) वृत्तकेन्द्राशीं (centre) आपातित (subtended) केलेल्या कोणाला आर (radian) म्हणतात.



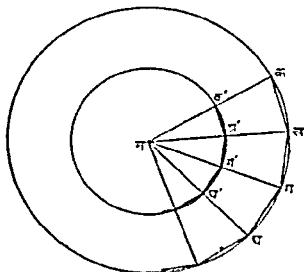
आ. १.२

बाजूच्या आकृतींत कखग वृत्ताचें म हें केन्द्र असून चाप कख वृत्तत्रिज्येएवढा लांब आहे.

म्हणून कमख या कोनाचें माप एक आर होईल. कमख कोण १$^{\text{आ}}$ असा लिहितात.

कमग या कोणत्याहि कोनाचें आरीय माप त्यांतील आरांच्या संख्येइतकें होईल.

१.४ कोणत्याहि वृत्ताचा परिघ आणि व्यास यांची निष्पत्ति (ratio) अचल (constant) असते.



आ. १.१

म हे एक केन्द्र असलेली दोन वृत्तें काढा. बाहेरील वृत्तांत स बाजू असलेल्या कखगघ...या नियमित (regular) बहुभुजाचे (polygon) अंतर्लेखन (inscribe) करा. मक, मख, मग, मघ, ... या त्रिज्या आंतील वृत्ताला क', ख' ग', घ', ... या बिंदूंत छेदतात असें समजा. म्हणून क' ख' ग' घ' ... हाहि एक स बाजू असलेला नियमित बहुभुज आंतील वृत्तांत अंतर्लिखित होतो.

आता, मक = मख

आणि मक' = मख'

म्हणून, मकख व मक'ख' या त्रिकोणांत,

$$\frac{\text{मक}}{\text{मक}'} = \frac{\text{मख}}{\text{मख}'}$$

आणि ∠म साधारण (common).

म्हणून हे दोन त्रिकोण समरूप (similar) आहेत.

$$\therefore \frac{\text{कख}}{\text{क}'\text{ख}'} = \frac{\text{मक}}{\text{मक}'}.$$

$$\text{आता, } \frac{\text{कखगघ ... बहुभुजाचें परिमाप (perimeter)}}{\text{क}'\text{ख}'\text{ग}'\text{घ}' \text{ ... बहुभुजाचें परिमाप}} = \frac{\text{स.कख}}{\text{स.क}'\text{ख}'}$$

$$= \frac{\text{कख}}{\text{क}'\text{ख}'},$$

$$= \frac{\text{मक}}{\text{मक}'}$$

आता भुजांची संख्या स कितीहि असली तरी वरील संबंध (relation) सत्य राहील.

म्हणून स ही संख्या अनंत (infinite) केल्यास बहुभुजांचीं परिमापें जवळजवळ त्यांच्या संवादी (corresponding) वृत्तांच्या परिघांइतकीं होतील.

$$\text{यावरून } \frac{\text{कखगघ ... वृत्ताचा परिघ}}{\text{क'ख'ग'घ'...वृत्ताचा परिघ}} = \frac{\text{मक}}{\text{मक}},$$

$$= \frac{\text{कखगघ... वृत्ताची त्रिज्या}}{\text{क'ख'ग'घ' ... वृत्ताची त्रिज्या}}$$

$$\text{किंवा, } \frac{\text{कखगघ...वृत्ताचा परिघ}}{\text{कखगघ....वृत्ताची त्रिज्या}} = \frac{\text{क'ख'ग'घ' ...वृत्ताचा परिघ}}{\text{क'ख'ग'घ' ....वृत्ताची त्रिज्या}}$$

दोन्ही वृत्तांच्या परिमाणांबद्दल (sizes) कोणताच निर्बंध (restriction) नसल्यामुळे $\frac{\text{वृत्तपरिघ}}{\text{त्रिज्या}}$ ही निष्पत्ति सर्व वृत्तांकरिता एकच असली पाहिजे. व्यास त्रिज्येच्या दुप्पट असतो, म्हणून $\frac{\text{वृत्तपरिघ}}{\text{व्यास}}$ ही निष्पत्तीही स्थिरांक (constant) आहे. हा स्थिरांक प्या या अक्षरानें दर्शविला जातो.

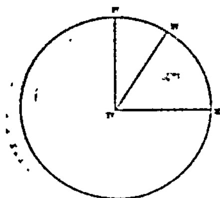
प्याचें मान जवळजवळ $\frac{२२}{७}$ किंवा ३.१४१५९ आहे.

उपसाध्य (corollary):— जर वृत्ताची त्रिज्या त्र असेल, तर

$$\text{परिघ} = २\text{त्र} \times \text{प्या}$$

$$= २\text{प्या त्र}$$

१.५ एका लंबकोनातील भागांची संख्या काढणे.



आ. १.४

म हे कमग वृत्ताचे केंद्र असून त्याची त्रिज्या त्र आहे. तसेच, ∠कमग = ९०° व ∠कमल = १°

आता, वृत्तचापांनी केंद्राशी केलेले कोन त्यांच्या लांबीशी अनुपाती (proportional) असतात.

$$\therefore \frac{\angle \text{कमग}}{\angle \text{कमल}} = \frac{\text{चाप कग}}{\text{चाप कल}}$$

$$= \frac{\frac{१}{४}\text{ परिघ}}{\text{त्रिज्या}} = \frac{\frac{१}{४}(२\text{ प्या त्र})}{\text{त्र}}$$

$$= \frac{\text{प्या}}{२}$$

$$\therefore \quad \angle \text{ कमग} = \left(\frac{\text{प्या}}{२}\right) \angle \text{कमख}$$

$$= \left(\frac{\text{प्या}}{२}\right)^{\text{आ}}$$

म्हणून एका लंबकोणांत $\frac{\text{प्या}}{२}$ आर समाविष्ट होतात.

किंवा, १ आर $= \left(\frac{२}{\text{प्या}}\right) \times$ (१लंबकोण)

पण प्या हा स्थिरांक आहे.

म्हणून १ आर हा अचल कोण आहे.

१·६ एक आर कोणाची महत्ता.

$$१^{\text{आ}} = \frac{२}{\text{प्या}} \times (\text{१लम्बकोण})$$

$$= \frac{२ \times ९०^\circ}{\text{प्या}}$$

$$= १८०^\circ \times (\cdot ३१८३१)$$

$$= ५७^\circ.२९५८$$

$$= ५७^\circ\ १७'\ ४४.८'' \qquad \text{(जवळजवळ)}$$

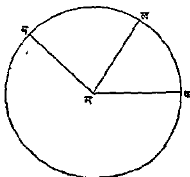
१·७ पुढील सूत्राच्या (formula) साह्याने आरीय, षाष्टिक व शातिक मापांचे परस्परांत परिवर्तन करतां येते.

$$\frac{\text{प्या}}{२}^{\text{आ}} = ९०^\circ = १००^{\text{श}}$$

ष्या वरील आ हें मूर्धाक्षर सहसा लिहीत नाहीत, पण तें अध्याहृत असतें.

१·८ कोणत्याहि कोनाचें आरीय माप $= \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$

कमव हा कोणताहि एक कोन आहे. म हा बिंदु केंद्र व मक त्रिज्या घेऊन एक वृत्त काढा आणि त्याला मक आणि मव ला क आणि व मधे छेदूं द्या. परिघावर चाप कख = त्रिज्या होईल असा ख बिंदु घ्या. मख जोडा.



आ. १·५

यावरून, $\angle$ कमख $= १^{\text{आ}}$

आतां रैखिकीनें,

$$\frac{\angle \text{कमव}}{\angle \text{कमख}} = \frac{\text{चाप कव}}{\text{चाप कख}} = \frac{\text{चाप कव}}{\text{त्रिज्या}}$$

$$\therefore \angle \text{कमव} = \left(\frac{\text{चाप कव}}{\text{त्रिज्या}}\right) \times \angle \text{कमख}$$

$$= \frac{\text{चाप कव}}{\text{त्रिज्या}} \times १ \text{ आर}$$

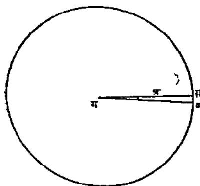
त्रिज्या, कव चापाची लांबी आणि कमव कोणाचें आरीय माप यांचें अभिधान (notation) क्रमशः त्र, व आणि अ ने केल्यास,

$$अ = \frac{व}{त्र}$$

अथवा $व = त्र.अ$

१·२ उदाहरण १— गोलाच्या (sphere) एकाच ध्रुववृत्तावर (meridian) असलेल्या दोन बिंदूंच्या अक्षवृत्तांतील (latitudes) कोण ३° ७′ ३०″ आहे व त्यांच्यांमधील गोलपृष्ठावर मोजलेलें अंतर ५ प्रांगुल (inch) आहे.

तर $\frac{१}{त्या}$ = ·३१८३१ घेऊन गोलाची त्रिज्या काढा.



आ १·६

क आणि ख हे दिलेले दोन बिंदू ज्या ध्रुववृत्तावर आहेत त्यांतून जाणारा गोलीय छेद (section of the sphere) आकृतींत दाखविला आहे. म हें गोलाचें केन्द्र असून त्र त्याची त्रिज्या आहे.

$$\frac{\text{चाप कख}}{\text{त्रिज्या}} = \angle \text{ कमख मधील आरांची संख्या}$$

आता, चाप कख = ५ प्रांगुल

आणि $\angle$ कमख = ३°७'३०"

$\therefore \frac{५}{त्र} =$ ३°७'३०" मधील आरांची संख्या

$= ३\frac{१}{८}^{\circ}$ मधील आरांची संख्या

$= ३\frac{१}{८} \times \frac{\text{प्या}}{१८०}$

$\therefore त्र = \frac{५ \times ८ \times १८०}{२५ \times \text{प्या}} = २८८ \times .३१८३१$

$= ९१.६७३२८$ प्रांगुल

उदाहरण २— एका त्रिकोणाचे कोण समांतर श्रेढींत (A.P.) असून त्याच्या लघुत्तम कोणांतील आर व महत्तम कोणांतील अंशाक यांची निष्पत्ति प्याः ४०० आहे. तर त्रिकोणाचे कोण अंशांत काढा.

समजा, (य − र)°, य° व (य + र)° हे त्रिकोणाचे कोण आहेत.

आता, त्रिकोणाच्या तीन कोणांचा योग (sum) १८०° असतो.

$\therefore$ (य − र) + य + (य + र) = १८०

किंवा, ३ य = १८०

किंवा, $य = ६०$

म्हणून $(६० - र)^\circ$, ६०°, $(६० + र)^\circ$ हे त्रिकोणाचे कोण होतील.

$$\text{आता, } (६० - र)^\circ = \left\{ \frac{\text{प्या}}{१८०} (६० - र) \right\} \text{आर}$$

$$\text{आणि } (६० + र)^\circ = \left\{ (६० + र) \frac{१०}{९} \right\}^{\text{ग्रे}}$$

$$\therefore \frac{\frac{\text{प्या}}{१८०}(६० - र)}{(६० + र)\frac{१०}{९}} = \frac{\text{प्या}}{४००}$$

$$\text{किंवा } \frac{\text{प्या}}{२००} \left(\frac{६० - र}{६० + र} \right) = \frac{\text{प्या}}{४००}$$

$$\text{किंवा } २ (६० - र) = ६० + र$$

$$\therefore र = २०$$

$\therefore$ इष्ट कोण ४०°, ६०° आणि ८०°

उदाहरणसंग्रह १

(१) ४२ इंच व्यास असलेलें एक वर्तुल बिम्ब (disc) घरंगळत सोडलें. तर बिम्बाच्या एका भ्रमणांत त्याचें केन्द्र किती अंतर जातें तें काढा. $\left(\text{प्या} = \frac{२२}{७}\right)$

(२) एक लहान किडा एका स्थिर (fixed) समांग (uniform) वर्तुलतारेवर चालत आहे. प्रत्येक कलेंत १३२ शतिमान (cms.) या वेगाने तो १७ कलांत तारेभोवती तीन प्रदक्षिणा करतो. तर तारेची त्रिज्या

काढा. $\left(\frac{१}{व्या}=\cdot३१८३१\right)$

(३) दोन नियमित बहुभुजाकृतींच्या भुजांच्या संख्या २:७ या प्रमाणांत असल्यास आणि पहिलीच्या कोणांतील अंश व दुसरीच्या कोणांतील अंशक यांचें प्रमाण ४२:५५ असल्यास त्या आकृतींच्या बाजू किती असल्या पाहिजेत तें काढा.

(४) एका पंचभुजाचे (pentagon) कोण समांतर श्रेढींत असून त्याचा महत्तम कोण लघुत्तम कोणाच्या दुप्पट आहे तर सर्व कोण अंशांत व आरीय मापांत काढा.

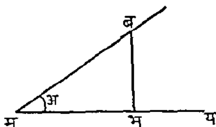
(५) (१) २॥ वाजतां, (२) ७ वाजून २० कलांनी, व (३) पावणेदहा वाजतां घड्याळाच्या काट्यांमधे होणारे कोण अंशांत, शतांशांत व आरांत व्यक्त करा.

(६) किती अंतरावर ५ पाद (foot) उंचीचा मनुष्य २०′ कोण आपातित करेल? $\left(\frac{१}{व्या}=\cdot३१८३१\right)$

प्रकरण दुसरें

न्यूनकोणांच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती

२.१ यमव हा एक न्यूनकोण असून त्याचें माप अ आहे असें समजा. मव या रेषेंत व हा कोणताहि बिंदु घेऊन व पासून मय वर वभ हा लंब काढा.



आ. २.१

वभम या त्रिकोणांत मव हा कर्ण (hypotenuse) वभ हा लंब (perpendicular) व मभ हा आधार (base) आहे. अ कोणाच्या त्रिकोणमितीय (trigonometrical) निष्पत्तींच्या परिभाषा (definitions) पुढे दिल्याप्रमाणे आहेत.

अ या कोणाची ज्या (sine) किंवा ज्या (अ) $= \frac{\text{भव}}{\text{मव}}$ किंवा $\frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}}$

अ या कोणाची कोटिज्या (cosine) किंवा कोज्या (अ) $= \frac{\text{मभ}}{\text{मव}}$

किंवा $\frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$

अ या कोणाची स्पर्शज्या (tangent) किंवा स्प (अ) $= \frac{\text{भव}}{\text{मभ}}$

किंवा $\frac{\text{लंब}}{\text{आधार}}$

अ या कोणाची व्युत्क्रमज्या (cosecant) किंवा व्युज्या अ $= \frac{\text{मव}}{\text{भव}}$

किंवा $\frac{\text{कर्ण}}{\text{लंब}}$

अ या कोणाची व्युत्क्रमकोटिज्या (secant) किंवा व्युत्कोज्या (अ)

$= \frac{\text{मव}}{\text{मभ}}$ किंवा $\frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$

अ या कोणाची कोटिस्पर्शज्या (cotangent) किंवा

कोस्प (अ) $= \frac{\text{मभ}}{\text{भव}}$ किंवा $\frac{\text{आधार}}{\text{लंब}}$

या सहा निष्पत्तींशिवाय आणखीहि दोन निष्पत्ती आहेत, परंतु त्यांचा क्वचित्‌च उपयोग होतो. त्या खाली दिल्या आहेत.

अ या कोणाची उत्क्रमज्या (versed sine)

किंवा उज्ज्या (अ) = १ − कोज्या (अ)

अ या कोणाची उत्क्रमकोटिज्या (coversed sine)

किंवा उत्को (अ) = १ − ज्या (अ)

प्रत्येक त्रिकोणमितीय निष्पत्ति दोन आयामांची (lengths) निष्पत्ति आहे. म्हणून सर्व त्रिकोणमितीय निष्पत्ती संख्यात्मक (numerical) राशी (quantities) आहेत हें लक्षांत ठेवावें.

२.२ त्रिकोणमितीय निष्पत्तींच्या मानांच्या सीमा. वरील अनुच्छेदाच्या (article) आकृतीवरून सहज दिसून येईल कीं, अ कोणाचें मान कांहीहि असलें तरी

भव <मव

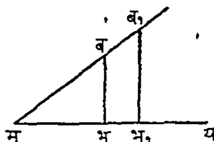
तसेंच, मभ < मव

म्हणून कोणत्याहि कोणाची ज्या आणि कोटिज्या १ पेक्षा अधिक असूं शकत नाहीं.

तसेंच, कोणत्याहि कोणाची व्युत्क्रमकोटिज्या आणि व्युत्क्रमज्या १ पेक्षा कमी असूं शकत नाही.

पण भव व मभ यांना स्वतंत्रपणें कांहीहि मान असूं शकतें. त्यामुळें स्पर्शज्या व कोटिस्पर्शज्या यांच्या मानांच्या सीमा (limits) ठरवितां येत नाहीत. त्यांचें मान शून्यापासून (zero) अनन्तापर्यंत (infinity) कोणतेंहि असूं शकतें.

२·३ दिलेल्या कोणाच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती नेहमी एकच असतात.



आ. २.२

यमब हा कोणताहि कोण आहे. मब रेषेत ब आणि $ब_1$ हे कोणतेहि दोन बिंदु घ्या आणि, ब आणि $ब_1$ पासून मय रेषेवर बभ आणि $ब_1भ_1$ हे लंब काढा.

आता, बभम आणि $ब_1भ_1म_1$ या त्रिकोणांत म हा कोण साधारण आहे.

आणि ∠ बभम = ∠ $ब_1भ_1म$ = प्रत्येकीं लंबकोण.

∴ बभम व $ब_1भ_1म$ हे त्रिकोण समरूप आहेत.

म्हणून $\frac{बभ}{मब} = \frac{भ_1ब_1}{मब_1}$

अर्थात्, मबवर कोणताहि बिंदु घेतला तरी यमब कोणाच्या ज्येचें मान बदलत नाही.

याचप्रमाणे, बाकीच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्तीहि बदलत नाहीत हें दाखवितां येईल.

२·४ व्युत्क्रम संबंध (reciprocal relations) –

२·१ या अनुच्छेदाच्या आकृतीवरून,

ज्या (अ) व्युज्ज्या (अ) = $\frac{मय}{मव} \times \frac{मव}{मय}$

$$= १$$

म्हणून, $\text{व्युज्ज्या (अ)} = \dfrac{१}{\text{ज्या (अ)}}$ (१)

त्याचप्रमाणे, $\text{व्युत्कोज्या(अ)} = \dfrac{१}{\text{कोज्या (अ)}}$ (२)

आणि $\text{कोस्प (अ)} = \dfrac{१}{\text{स्प (अ)}}$ (३)

हें सहज दिसून येईल.

टीप :— यापुढे आपण ज्या (अ), कोज्या (अ), स्प (अ) इत्यादि निष्पत्ती ज्या अ, कोज्याअ, स्प अ, इत्यादि अशा लिहूं.

२.५ मूलभूत ऐकात्म्यें (fundamental identities)— यभम त्रिकोणांत (आकृति § २.१)

$$\angle \text{ मभय} = ९०^{\circ}$$

$$\therefore \text{ मय}^{२} = \text{भय}^{२} + \text{मभ}^{२}$$

या समीकाराला (equation) अनुक्रमें मय², मभ² व भय² नें भागिल्यास,

$$\left(\frac{\text{भय}}{\text{मय}}\right)^{२} + \left(\frac{\text{मभ}}{\text{मय}}\right)^{२} = १ \text{ ....(क)}$$

$$\left(\frac{\text{मय}}{\text{मभ}}\right)^{२} = \left(\frac{\text{भय}}{\text{मभ}}\right)^{२} + १ \text{ ....(ख)}$$

$$\left(\frac{मन}{मय}\right)^२ = १ + \left(\frac{मभ}{मन}\right)^२ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(कि)$$

त्रिकोणमितीय निष्पत्तींच्या परिभाषांवरून व (क) समीकारानुसार,

$$(ज्याअ)^२ + (कोज्याअ)^२ = १$$

$$अथवा,\ ज्या^२\ अ + कोज्या^२\ अ = १ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(४)$$

तसेंच (का) आणि (कि) वरून,

$$व्युत्कोज्या^२\ अ = १ + स्प^२ अ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(५)$$

$$व्युज्ज्या^२\ अ = १ + कोस्प^२\ अ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(६)$$

$$शिवाय,\ \frac{ज्या\ अ}{कोज्या\ अ} = \frac{भय/मय}{मभ/मय} = \frac{भय}{मभ} = स्प\ अ$$

$$अर्थात्\ स्प\ अ = \frac{ज्या\ अ}{कोज्या\ अ} \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(७)$$

$$तसेंच,\ कोस्प\ अ = \frac{कोज्या\ अ}{ज्या\ अ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(८)$$

२·६ आता आपण वर सिद्ध केलेल्या मूलभूत ऐकात्म्यांच्या साह्याने कांही उदाहरणें सोडवूं.

$$उदाहरण\ १ — \sqrt{\frac{१ - ज्या\ अ}{१ + ज्या\ अ}}\ \sqrt{\frac{व्युत्कोज्या\ अ + १}{व्युत्कोज्या\ अ - १}} = कोस्प\ अ\left(\frac{१ + कोज्या\ अ}{१ + ज्या\ अ}\right)$$

हें सिद्ध करा.

$$\text{वाम पक्ष} = \sqrt{\frac{१ - \text{ज्या}^२ \text{ अ}}{(१ + \text{ज्या अ})^२}} \sqrt{\frac{(\text{व्युत्कोज्या अ} + १)^२}{\text{व्युत्कोज्या}^२ \text{ अ} - १}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या अ}}{१ + \text{ज्या अ}} \times \frac{\text{व्युत्कोज्या अ} + १}{\text{स्प अ}}$$

$$= \frac{१ + \text{कोज्या अ}}{(१ + \text{ज्या अ}) \text{ स्प अ}}$$ (गतानुच्छेदांतील (४) व (५) या सूत्रांनुसार)

$$= \frac{(१ + \text{कोज्या अ})}{(१ + \text{कोज्या अ}) \text{स्प अ}}$$

$$= \text{कोस्प अ} \cdot \frac{(१ + \text{कोज्या अ})}{(१ + \text{ज्या अ})}$$

= दक्षिण-पक्ष (right hand side)

उदाहरण, २— सिद्ध करा :—

$$(१ + \text{कोस्प अ} - \text{व्युज्ज्या अ})(१ + \text{स्प अ} + \text{व्युत्कोज्या अ}) = २$$

$$\text{वाम पक्ष} = \left(१ + \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} - \frac{१}{\text{ज्या अ}}\right) \times \left(१ + \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} + \frac{१}{\text{कोज्या अ}}\right)$$

$$= \left(\frac{\text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ} - १}{\text{ज्या अ}}\right) \times \left(\frac{\text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ} + १}{\text{कोज्या अ}}\right)$$

$$= \frac{(\text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ})^{2} - \text{१}}{\text{ज्या अ.कोज्या अ}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या}^{2}\text{ अ} + \text{ज्या}^{2}\text{ अ} + \text{२ ज्या अ कोज्या अ} - \text{१}}{\text{ज्या अ . कोज्या अ}}$$

$$= \frac{\text{२ ज्या अ . कोज्या अ}}{\text{ज्या अ . कोज्या अ}}, \text{ सूत्र (४) वरून}$$

$$= \text{२}$$

उदाहरण ३— सिद्ध करा —

$$\text{कोज्या}^{6}\text{ अ} + \text{ज्या}^{6}\text{ अ} = \text{१} - \text{३ ज्या}^{2}\text{ अ } (\text{१} - \text{ज्या}^{2}\text{ अ})$$

$$= \text{१} - \text{३ कोज्या}^{2}\text{ अ } (\text{१} - \text{कोज्या}^{2}\text{ अ})$$

आता, वाम पक्ष = $(\text{कोज्या}^{2}\text{ अ} + \text{ज्या}^{2}\text{ अ}) \times$
$(\text{कोज्या}^{4}\text{ अ} - \text{कोज्या}^{2}\text{ अ ज्या}^{2}\text{अ} + \text{ज्या}^{4}\text{ अ})$

$$= \text{कोज्या}^{4}\text{ अ} - \text{कोज्या}^{2}\text{ अ ज्या}^{2}\text{ अ} + \text{ज्या}^{4}\text{ अ}$$

$$(\because \text{ज्या}^{2}\text{ अ} + \text{कोज्या}^{2}\text{ अ} = \text{१})$$

$$= (\text{कोज्या}^{2}\text{ अ} + \text{ज्या}^{2}\text{ अ})^{2} - \text{३ कोज्या}^{2}\text{ अ ज्या}^{2}\text{ अ}$$

$$= \text{१} - \text{३ ज्या}^{2}\text{ अ } (\text{१} - \text{ज्या}^{2}\text{ अ})$$

$$= \text{१} - \text{३ कोज्या}^{2}\text{ अ } (\text{१} - \text{कोज्या}^{2}\text{ अ})$$

उदाहरणसंग्रह २

पुढील ऐकात्म्यें सिद्ध कराः—

(१) $\dfrac{\text{ज्या अ} + \text{व्युत्कोज्या अ}}{\text{कोज्या अ} + \text{व्युज्ज्या अ}} = \text{स्प अ}$ [बनारस १९३८

(२) $\text{व्युज्ज्या}^{४} \text{ अ} - \text{कोस्प}^{४} \text{ अ} = १ + २ \text{ कोस्प}^{२}\text{अ}$

(३) $\text{व्युत्कोज्या अ} - \text{स्प अ} = \dfrac{\text{कोस्प अ}}{१ + \text{व्युज्ज्या अ}}$

(४) $\sqrt{\dfrac{\text{व्युत्कोज्या अ} - १}{\text{व्युत्कोज्या अ} + १}} = \text{व्युज्ज्या अ} - \text{कोस्प अ}$

(५) $\dfrac{\text{कोस्प अ} + \text{व्युज्ज्या अ} - १}{\text{कोस्प अ} - \text{व्युज्ज्या अ} + १} = \sqrt{\dfrac{१ + \text{कोज्या अ}}{१ - \text{कोज्या अ}}}$

(६) $\text{कोस्प}^{२} \text{ अ} + \text{कोस्प}^{४} \text{ अ} = \text{व्युज्ज्या}^{४} \text{ अ} - \text{व्युज्ज्या}^{२} \text{ अ}$

(७) $[\text{व्युत्कोज्या}^{२} \text{ अ स्पअ} + २ \text{ व्युत्कोज्या अ व्युज्ज्या अ} + \text{व्युज्ज्या}^{२} \text{ अ कोस्प अ}] = \text{व्युत्कोज्या}^{३} \text{ अ} \times \text{व्युज्ज्या}^{३} \text{ अ}$ [बनारस १९४२

(८) $\dfrac{\text{स्प}^{२} \text{ अ}}{१ + \text{स्प}^{२} \text{ अ}} \cdot \dfrac{१ + \text{कोस्प}^{२} \text{ अ}}{\text{कोस्प}^{२} \text{ अ}} = \text{ज्या}^{२} \text{ अ} \times \text{व्युत्कोज्या}^{२} \text{ अ}$

(९) $\dfrac{१}{\text{व्युत्कोज्या अ} + \text{स्पअ}} - \dfrac{१}{\text{कोज्या अ}}$

$$= \frac{१}{\text{कोज्या अ}} - \frac{१}{\text{व्युत्कोज्या अ} - \text{स्प अ}}$$

(१०) $\text{व्युत्कोज्या अ} + \text{स्प अ} = \frac{१ + \text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} = \frac{\text{कोज्या अ}}{१ - \text{ज्या अ}}$

$$= \frac{१ + \text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ}}{१ + \text{कोज्या अ} - \text{ज्या अ}}$$

[नागपूर १९३९

(११) $\frac{\text{कोस्प क} - \text{स्प ख}}{\text{कोस्प ख} - \text{स्प क}} = \text{कोस्प क स्प ख}$

(१२) $१ - \frac{\text{ज्या}^२ \text{ अ}}{१ + \text{कोस्प अ}} - \frac{\text{कोज्या}^२ \text{ अ}}{१ + \text{स्प अ}} = \text{ज्या अ कोज्या अ}$

[बनारस १९४३

(१३) $\frac{\text{कोज्या अ}}{१ - \text{स्प अ}} + \frac{\text{ज्या अ}}{१ - \text{कोस्प अ}} = \text{ज्या अ} + \text{कोज्या अ}$

[बनारस १९४५

(१४) $\text{ज्या}^६ \text{ अ} + \text{ज्या}^४ \text{ अ कोज्या}^२ \text{ अ} - \text{ज्या}^२ \text{ अ कोज्या}^४ \text{अ} - \text{कोज्या}^६ \text{ अ} = \text{ज्या}^२ \text{ अ} - \text{कोज्या}^२ \text{ अ}$

(१५) $(\text{कोस्प अ} + \text{व्युज्ज्या अ})^२ = \frac{१ + \text{कोज्या अ}}{१ - \text{कोज्या अ}}$

(१६) $२ \text{ स्प}^२ \text{ अ} = \frac{१}{\text{व्युज्ज्या अ} - १} - \frac{१}{\text{व्युज्ज्या अ} + १}$

[नागपूर १९३९

(१७) $\frac{\text{कोज्या अ}}{१ - \text{ज्या अ}} + \frac{१ - \text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} = २ \text{ व्युत्कोज्या अ}$

(१८) $\dfrac{२\ \text{व्युत्कोज्या अ स्प अ} - \text{स्प अ}}{१ - \text{व्युत्कोज्या अ} + \text{व्युत्कोज्या}^{२}\ \text{अ} + \text{स्प}^{२}\ \text{अ}}$
$= \text{ज्या अ}$

(१९) $(\text{स्प क} + \text{व्युज्ज्या ख})^{२} - (\text{कोस्प ख} - \text{व्युत्कोज्या क})^{२}$
$= २\ \text{स्प क कोस्प ख}\ (\text{व्युज्ज्या क} + \text{व्युत्कोज्या ख})$

(२०) जर $\text{स्प अ} + \text{ज्या अ} = \text{म}$
व $\text{स्प अ} - \text{ज्या अ} = \text{न}$ असेल
तर $\text{म}^{२} - \text{न}^{२} = ४\sqrt{\text{मन}}$ हें सिद्ध करा.
[बनारस १९३९

(२१) ज्या अ च्या रूपांत व्यक्त करा :—
$(\text{व्युत्कोज्या अ} - \text{कोज्या अ})\sqrt{\dfrac{१ - \text{ज्या अ}}{१ + \text{ज्या अ}}}$

(२२) व्युत्कोज्या अ च्या रूपांत व्यक्त करा :—
$\text{कोज्या अ} + \dfrac{\text{स्प अ कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} + \dfrac{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}$
[बनारस १८९९

२·७ एखाद्या कोणाची कोणतीहि एक त्रिकोणमितीय निष्पत्ति माहीत असल्यास त्या कोणाच्या इतर सर्व निष्पत्ती काढतां येतात.

उदाहरण १— सर्व त्रिकोणमितीय निष्पत्ती कोटिज्येच्या रूपांत व्यक्त करा.

समजा, कोज्या अ = क्ष

$$\therefore \text{ज्या अ} = \sqrt{१ - \text{कोज्या}^{२}\text{अ}}$$

$$= \sqrt{१ - \text{क्ष}^{२}}$$

$$\text{व्युज्ज्या अ} = \frac{१}{\text{ज्या अ}}$$

$$= \frac{१}{\sqrt{१ - \text{क्ष}^{२}}}$$

$$\text{व्युत्कोज्या अ} = \frac{१}{\text{कोज्या अ}}$$

$$= \frac{१}{\text{क्ष}}$$

$$\text{स्प अ} = \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}}$$

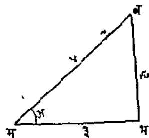
$$= \frac{\sqrt{१ - \text{क्ष}^{२}}}{\text{क्ष}}$$

$$\text{कोस्प अ} = \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}}$$

$$= \frac{\text{क्ष}}{\sqrt{१ - \text{क्ष}^{२}}}$$

उदाहरण २— कोस्प अ $= \frac{३}{\sqrt{७}}$ असल्यास इतर त्रिकोण-

मितीय निष्पत्तींची संख्यात्मक मानें काढा.



आ. २.३

बभम या लंबकोणत्रिकोणांत,

$\angle$ भमब = अ,

भब = $\sqrt{७}$,

व मभ = ३

म्हणून, कोस्प अ = $\dfrac{३}{\sqrt{७}}$

आता, मब = $\sqrt{\text{मभ}^{2} + \text{भब}^{2}}$

= $\sqrt{९+७}$

= ४

$\therefore$ ज्या अ = $\dfrac{\text{भब}}{\text{मब}} = \dfrac{\sqrt{७}}{४}$

आणि व्युज्ज्या अ = $\dfrac{४}{\sqrt{७}}$

स्प अ = $\dfrac{१}{\text{कोस्प अ}} = \dfrac{\sqrt{७}}{३}$

कोज्या अ = $\dfrac{३}{४}$

आणि व्युत्कोज्या अ = $\dfrac{४}{३}$

उदाहरण ३— व्युत्कोज्या अ − स्प अ = $\sqrt{\dfrac{२}{५}}$ असल्यास ज्या अ काढा.

आता, $व्युत्कोज्या\ अ - स्प\ अ = \frac{१ - ज्या\ अ}{कोज्या\ अ}$

$$= \frac{१ - ज्या\ अ}{\sqrt{१ - ज्या^२ अ}}$$

$$= \frac{\sqrt{१ - ज्या\ अ}}{\sqrt{१ + ज्या\ अ}}$$

म्हणून $\sqrt{\frac{१ - ज्या अ}{१ + ज्या\ अ}} = \sqrt{\frac{३}{५}}$

किंवा, $\frac{१ - ज्या\ अ}{१ + ज्या\ अ} = \frac{३}{५}$

$\therefore ८\ ज्या\ अ = २$

किंवा $ज्या\ अ = \frac{१}{४}$

उदाहरण ४— जर $कोस्प\ अ = \frac{क्ष}{ज्ञ}$ असेल तर

$\frac{क्ष\ कोज्या\ अ - ज्ञ\ ज्या\ अ}{क्ष\ कोज्या\ अ + ज्ञ\ ज्या\ अ}$ चे मान काढा.

$$\frac{क्ष\ कोज्या\ अ - ज्ञ\ ज्या\ अ}{क्ष\ कोज्या\ अ + ज्ञ\ ज्या\ अ} = \frac{क्ष\ कोस्प\ अ - ज्ञ}{क्ष\ कोस्प\ अ + ज्ञ},$$

[अंश (numerator) व हर (denominator) यांना ज्या अ ने भागून]

$$= \frac{\text{क्ष}\cdot\frac{\text{क्ष}}{\text{ज्ञ}} - \text{ज्ञ}}{\text{क्ष}\cdot\frac{\text{क्ष}}{\text{ज्ञ}} + \text{ज्ञ}}$$

$$= \frac{\text{क्ष}^{२} - \text{ज्ञ}^{२}}{\text{क्ष}^{२} + \text{ज्ञ}^{२}}$$

उदाहरणसंग्रह ३

(१) सर्व त्रिकोणमितीय निष्पत्ती ज्येच्या रूपांत व्यक्त करा.

(२) सर्व निष्पत्ती स्पर्शज्येच्या रूपांत व्यक्त करा.

(३) सर्व निष्पत्ती व्युत्क्रमकोटिज्येच्या रूपांत व्यक्त करा.

(४) ज्या अ आणि कोज्या अ कोस्प अ च्या रूपांत व्यक्त करा.

(५) कोज्या अ आणि कोस्प अ व्युज्ज्या अ च्या रूपांत व्यक्त करा.

(६) एका कोणाची ज्या, $\frac{\text{क्ष}(\text{क्ष}+२\text{ज्ञ})}{\text{क्ष}^{२}+२\text{क्षज्ञ}+२\text{ज्ञ}^{२}}$ आहे. तर त्या कोणाच्या इतर निष्पत्तींचे मान काढा.

[कलकत्ता १८७९.

(७) जर २व्युत्कोज्या अ $= \frac{\text{य}}{\text{र}} + \frac{\text{र}}{\text{य}}$ असेल तर

(व्युज्ज्या अ + कोस्प अ) चें मान काढा.

(८) जर ज्याअ $= \frac{१}{\sqrt{५}}$ असेल तर

$\frac{\text{कोस्प}^२\text{अ} - \text{स्प}^२\text{अ}}{\text{कोस्प}^२\text{अ} + \text{स्प}^२\text{अ}}$ चें मान काढा.

(९) जर स्प अ $= \frac{१}{\sqrt{३}}$ असेल तर

$\frac{\text{व्युज्ज्या}^२\text{अ} - \text{व्युत्कोज्या}^२\text{अ}}{\text{व्युज्ज्या}^२\text{अ} + \text{व्युत्कोज्या}^२\text{अ}} = \frac{१}{२}$ हें दाखवा.

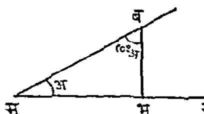
(१०) जर स्प^{२}अ $=$ १ $-$ न^२ असेल तर

व्युत्कोज्या अ + स्प^{३}अ व्युज्ज्या अ $= (२ - \text{न}^२)^{\frac{३}{२}}$ हें दाखवा. [बनारस १८९८

प्रकरण तिसरें

काही प्रमाप (standard) कोणांच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती

३·१ लम्बपूरक कोणांच्या निष्पत्ती.



आ. ३.१

यमव हा कोणताहि एक न्यूनकोण आहे. मव रेषेंत व हा कोणताहि बिंदु घेऊन त्यांतून मय वर वभ हा लंब काढा.

आता वमभ या लंबकोणत्रिकोणांत मवभ हा कोण वमभ या कोणाचा लंबपूरक (complementary) आहे.

म्हणून ∠वमभ = अ असल्यास ∠मवभ = ९०° − अ होईल.

आकृतीवरून,

$$\text{ज्या } (९०^\circ - \text{अ}) = \frac{\text{मभ}}{\text{मव}} = \text{कोज्या अ}$$

$$\text{कोज्या } (९०^\circ - \text{अ}) = \frac{\text{वभ}}{\text{मव}} = \text{ज्या अ}$$

$$\text{स्प } (९०^\circ - अ) = \frac{मम}{मव} = \text{कोस्प अ}$$

त्याचप्रमाणे, व्युज्ज्या (९०° – अ) = व्युत्कोज्या अ,

व्युत्कोज्या (९०° – अ) = व्युज्ज्या अ,

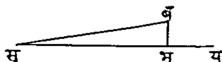
कोस्प (९०° – अ) = स्प अ

हेंहि सिद्ध करतां येईल.

आता आपण नेहमी लागणाऱ्या कांही प्रमाप कोनांच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती काढूं.

३.२ ०° च्या निष्पत्ती.

मव या सदिश त्रिज्येने यमव हा अतिशय लहान कोण रेखिला असून मव ची लांबी स्थिर आहे. मय वर यम हा लंब काढा.



आ. ३·२

$$\text{म्हणून ज्या भमव} = \frac{भव}{मव}$$

आता भमव कोण हळूहळू असा लहान करा कीं शेवटीं मव चें मय शीं संपतन (coincidence) होऊन भमव कोण शून्य आणि भव = ० होईल.

$$\text{म्हणून, ज्या}०^\circ = \frac{०}{मव} = ०$$

$$\text{आता, कोज्या भमव} = \frac{मभ}{मव}$$

म्हणून भमव कोण शून्य होतो तेव्हां

$$\text{कोज्या}0^\circ = \frac{\text{मभ}}{\text{मम}} = १$$

$$\text{आणि स्प}0^\circ = \frac{\text{ज्या}0^\circ}{\text{कोज्या}0^\circ}$$

$$= \frac{0}{१}$$

$$= 0$$

$$\text{पण व्युज्ज्या}0^\circ = \frac{१}{\text{ज्या}0^\circ}$$

$$= \frac{१}{0}$$

आता कोणत्याहि परिमित (finito) राशीस अत्यणु (infinitely small) राशीने भागिलें असतां आपणांस अनंताइतकी मोठी संख्या मिळते. ही अनंतराशी ∞ या चिन्हाने (symbol) दर्शवितात.

$$\text{म्हणून व्युज्ज्या } 0^\circ = \infty$$

$$\text{पुन्हा व्युत्कोज्या}0^\circ = \frac{१}{\text{कोज्या}0^\circ}$$

$$= \frac{१}{१}$$

$$= १$$

आणि कोस्प $0^\circ = \frac{१}{स्प 0^\circ}$

$= \frac{१}{0}$

$= \infty$

३·२१ ९०° किंवा $\frac{\text{प्या}}{२}$ च्या निष्पत्ती.

0° व ९०° हे कोण लंबपूरक आहेत.

म्हणून ३·१ व ३·२ या अनुच्छेदांवरून,

ज्या ९०° = कोज्या 0°

= १

कोज्या ९०° = ज्या 0°

= 0

स्प ९०° = $\frac{\text{ज्या ९०}^\circ}{\text{कोज्या९०}^\circ}$

$= \frac{१}{0}$

$= \infty$

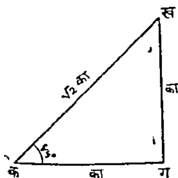
∴ व्युज्ज्या ९०° = १ ,

व्युत्कोज्या ९०° = ∞ ,

कोस्प ९०° = 0.

अभ्यास :— ९०° कोणाच्या निष्पत्ती रैखिकीने काढा.

३·३ ४५° किंवा $\frac{\text{प्या}}{४}$ च्या निष्पत्ती.



आ ३.३

कखग या लंबकोण समद्विभुज (isosceles) त्रिकोणांत,

$\angle$ ग = ९०°

आणि $\angle$ क = $\angle$ ख = ४५°

समजा कग = खग = का

$$\therefore \text{ कख} = \sqrt{\text{का}^२ + \text{का}^२}$$

$$= \sqrt{२}\text{ का}$$

$$\therefore \text{ ज्या } ४५° = \frac{\text{खग}}{\text{कख}}$$

$$= \frac{\text{का}}{\sqrt{२}\text{ का}}$$

$$= \frac{१}{\sqrt{२}}$$

$$\text{कोज्या } ४५° = \frac{\text{कग}}{\text{कख}}$$

$$\text{स्प } ६०^\circ = \frac{\text{ज्या } ६०^\circ}{\text{कोज्या } ६०^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{३}/२}{१/२}$$

$$= \sqrt{३}$$

आणि, $\text{व्युज्ज्या } ६०^\circ = \frac{२}{\sqrt{३}}$,

$\text{व्युत्कोज्या } ६०^\circ = २$,

$\text{कोस्प } ६०^\circ = \frac{१}{\sqrt{३}}$

३·५ ३०° किंवा $\frac{\pi}{६}$ च्या निष्पत्ती.

३०° व ६०° हे लंबपूरक कोण आहेत.

म्हणून ३·१ व ३·४ या अनुच्छेदांनुसार,

$$\text{ज्या } ३०^\circ = \text{कोज्या } ६०^\circ$$

$$= \frac{१}{२}$$

$$\text{कोज्या } ३०^\circ = \text{ज्या } ६०^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{३}}{२}$$

$$\text{स्प } ३०^\circ = \frac{\text{ज्या } ३०^\circ}{\text{कोज्या } ३०^\circ}$$

$$= \frac{१/२}{\sqrt{३}/२}$$

$$= \frac{१}{\sqrt{३}}$$

आणि, व्युज्ज्या $३०^\circ = २$,

व्युत्कोज्या $३०^\circ = \frac{२}{\sqrt{३}}$,

कोस्प $३०^\circ = \sqrt{३}$

अभ्यास:— ३·७ या अनुच्छेदाच्या आकृतीवरून ३०° कोणाच्या निष्पत्ती काढा.

३.६ ०°, ३०°, ४५°, ६०° व ९०° या प्रमाण कोणांच्या निष्पत्ती वारंवार लागतात. त्या खालील सारणीच्या (table) रूपांत एकत्रित केल्या आहेत. ही सारणी विद्यार्थ्यांनी पाठ

फरावी.

कोण	०°	३०°	४५°	६०°	९०°
ज्या	०	$\frac{१}{२}$	$\frac{१}{\sqrt{२}}$	$\frac{\sqrt{३}}{२}$	१
कोटिज्या	१	$\frac{\sqrt{३}}{२}$	$\frac{१}{\sqrt{२}}$	$\frac{१}{२}$	०
स्पर्शज्या	०	$\frac{१}{\sqrt{३}}$	१	$\sqrt{३}$	∞
व्युत्क्रमज्या	∞	२	$\sqrt{२}$	$\frac{२}{\sqrt{३}}$	१
व्युत्क्रम-कोटिज्या	१	$\frac{२}{\sqrt{३}}$	$\sqrt{२}$	२	∞
कोटिस्पर्शज्या	∞	$\sqrt{३}$	१	$\frac{१}{\sqrt{३}}$	०

३.६१ उदाहरण १.— सत्यापन करा (verify) :—

$$\text{ज्या } ६०^\circ = \frac{२ \text{ स्प } ३०^\circ}{१ + \text{स्प}^२ ३०^\circ}$$

$$\text{दक्षिण पक्ष} = \frac{२ \cdot \frac{१}{\sqrt{३}}}{१ + \frac{१}{३}}$$

$$= \frac{२}{\sqrt{३}} \times \frac{३}{४}$$

$$= \frac{\sqrt{३}}{२}$$

$$= \text{ज्या } ६०^\circ$$

$$= \text{वाम पक्ष}$$

उदाहरण २— सिद्ध करा :—

$$(\text{कोज्या } ३०^\circ + \text{स्प } ६०^\circ)^२ + (\text{ज्या } ४५^\circ + \sqrt{२}\ \text{कोज्या } ६०^\circ)^२ + (\text{कोस्प } ६०^\circ - \text{कोज्या } ३०^\circ)^२ = \frac{५३}{६}$$

$$\text{वाम पक्ष} = \left(\frac{\sqrt{३}}{२} + \sqrt{३}\right)^२ + \left(\frac{१}{\sqrt{२}} + \sqrt{२} \times \frac{१}{२}\right)^२ + \left(\frac{१}{\sqrt{३}} - \frac{\sqrt{३}}{२}\right)^२$$

$$= \left(\frac{३\sqrt{३}}{२}\right)^२ + \left(\frac{२}{\sqrt{२}}\right)^२ + \left(-\frac{१}{२\sqrt{३}}\right)^२$$

$$= \frac{२७}{४} + \frac{४}{२} + \frac{१}{१२}$$

$$= \frac{८१ + २४ + १}{१२}$$

$$= \frac{१०६}{१२}$$

$= \frac{५३}{६}$

= दक्षिण पक्ष

उदाहरणसंग्रह ४

(१) सत्यापन करा :—

(१) ज्या ६०° = २ज्या ३०° कोज्या ३०°

(२) कोज्या ९०° = कोज्या²४५° − ज्या²४५°

= २ कोज्या²४५° − १

= १ − २ज्या²४५°

(३) ज्या ३०° $= \sqrt{\frac{१ - \text{कोज्या } ६०°}{२}}$

(४) कोज्या ३०° $= \sqrt{\frac{१ + \text{कोज्या } ६०°}{२}}$

* (२) सत्यापन करा :—

(१) ज्या १३५° = ३ ज्या ४५° − ४ ज्या³४५°

(२) कोज्या १३५° = ४ कोज्या³४५° − ३ कोज्या ४५°

(३) स्प १२०° $= \frac{४ \text{ स्प } ३०° - ४ \text{ स्प}^{३} ३०°}{१ - ६\text{स्प}^{२}३०° + \text{स्प}^{४}३०°}$

---

* पांचवें प्रकरण झाल्यानंतर उदाहरण २ सोडवावें.

(४) कोज्या १२०° $= \frac{१ - स्प^2 ६०°}{१ + स्प^2 ६०°}$

(३) सिद्ध कराः—

(व्युत्कोज्या^{2} ४५° + व्युज्ज्या^{2} ६०° + कोस्प^2 ३०°)

$= ४$(कोज्या^{2} ४५° + ज्या^{2} ६०° + स्प^2 ३०°) $= ६\frac{१}{३}$

(४) सिद्ध कराः—

(व्युत्कोज्या ३०° स्प ६०° + ज्या ४५° व्युज्ज्या ४५°

+ कोज्या ३०° कोस्प ६०°) $= \frac{७}{२}$

३.७ सीमेची कल्पना.

$\frac{क}{य}$ हा भिन्न (fraction) विचारांत घ्या. क चें एक विवक्षित स्थिर मान ठेवून य ची महत्ता वदला.

उदाहरणार्थ, $\frac{क}{\frac{१}{१०}} = १०क,$

$\frac{क}{१०००} = १०००क$

इत्यादि.

य जसजसा कमी होईल तसतसें $\frac{क}{य}$ या भिन्नाचें मान

वाढत जाईल हें स्पष्ट आहे. य हा दर पुरेसा लहान घरून $\frac{क}{य}$ या राशींचें मान पाहिजे तितकें वाढवितां येईल. म्हणजे य चें मान जेव्हां शून्याच्या समीप येईल तेव्हां $\frac{क}{य}$ हा मिश्र अनंताइतका मोठा होईल.

हें, य शून्यप्रवृत्त होतो (tends to zero), तेव्हां $\frac{क}{य}$ ची सीमा ∞ होते,
किंवा संक्षेपतः,

$$\underset{य \to 0}{सी}\left(\frac{क}{य}\right) = \infty$$

अशा प्रकारें व्यक्त करतात.

पुन्हा, य ही राशि जर हळूहळू वाढवून शेवटीं अनंताइतकी मोठी केली तर $\frac{क}{य}$ हा मिश्र अल्पणु होईल;

अर्थात् $\underset{य \to \infty}{सी}\left(\frac{क}{य}\right) = 0$

३.८ वृत्तशकलाचें (sector of a circle) क्षेत्रफळ. म हें एका त्र त्रिज्या असणाऱ्या वृत्ताचें केन्द्र असून

$\therefore$ कमख शकलाचें क्षेत्रफळ $= \dfrac{\text{अ}}{२\,\text{प्या}}$

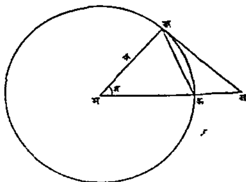
$\times$ (संपूर्ण वृत्ताचें क्षेत्रफळ)

$$= \frac{\text{अ}}{२\,\text{प्या}} \times \text{प्या त्र}^{२}$$

$$= \frac{१}{२}\,\text{अ त्र}^{२}$$

३·२ अ आरीय मापांत आणि $० < \text{अ} < \dfrac{\text{प्या}}{२}$ असेल तर ज्या अ $<$ अ $<$ स्प अ.

त्र त्रिज्या असणाऱ्या एका वृत्ताचें म हें केन्द्र असून कमख हें वृत्तशकल आहे.



आ ३ ६

आकृतीवरून, कमख त्रिकोण हा कमख शकलांत पूर्णपणें समाविष्ट झाला आहे, तसेंच कमख शकलहि मखस त्रिकोणांत समाविष्ट झालें आहे हें दिसून येईल.

म्हणून, △ कमख < शकल कमख < △ मखस

$\therefore \frac{१}{२}$ अ^{२}ज्या अ $< \frac{१}{२}$ अ^{२} अ $< \frac{१}{२}$ अ^{२}स्प अ

किंवा, $\frac{१}{२}$ अ^{२}ने भागून

ज्या अ < अ < स्प अ

३.९१ अ शून्यप्रवृत्त होतो तेव्हां $\frac{\text{ज्या अ}}{\text{अ}}$ आणि $\frac{\text{स्प अ}}{\text{अ}}$ ह्या सीमान्तीं प्रत्येकीं एकासमान होतात.

वरील अनुच्छेदानुसार,

ज्या अ < अ < स्प अ ... .(१)

प्रत्येकास ज्या अ ने भागून,

$$१ < \frac{\text{अ}}{\text{ज्या अ}} < \frac{१}{\text{कोज्या अ}}$$

किंवा $१ < \frac{\text{अ}}{\text{ज्या अ}} <$ व्युत्कोज्या अ

अ अल्पणु होतो तेव्हां व्युत्कोज्या अ चें मान १ होतें.

म्हणजेच $\frac{\text{ज्या अ}}{\text{अ}}$ ची सीमा १ होते.

नमॅच (१) ला साद्यंत (throughout) स्प अ ने भागिल्यास,

$$\text{कोज्या अ} < \frac{\text{अ}}{\text{स्प अ}} < १$$

परंतु अ अत्यणु होतो तव्हां कोज्या अ १ होते.

म्हणून $\frac{\text{अ}}{\text{स्प अ}}$ किंवा $\frac{\text{स्प अ}}{\text{अ}}$ ची सीमा १ होते.

हीं फलें (results) सामान्यतः खालील रूपांत लिहितातः—

$$\underset{\text{अ}\to 0}{\text{सी}} \left(\frac{\text{ज्या अ}}{\text{अ}}\right) = १$$

$$\underset{\text{अ}\to 0}{\text{सी}} \left(\frac{\text{स्प अ}}{\text{अ}}\right) = १$$

३·९२ उदाहरण १— अ आरीय मापांत असल्यास

$$\underset{\text{स}\to\infty}{\text{सी}} \left[\text{स ज्या}\left(\frac{\text{अ}}{\text{स}}\right)\right] = \text{अ हें दाखवा.}$$

$$\text{स ज्या}\left(\frac{\text{अ}}{\text{स}}\right) = \text{अ}\cdot\frac{\text{ज्या}\left(\frac{\text{अ}}{\text{स}}\right)}{\left(\frac{\text{अ}}{\text{स}}\right)}$$

$$\therefore \underset{स \to \infty}{\text{सी}} \left[म \text{ ज्या}\left(\frac{अ}{स}\right) \right] = अ \cdot \underset{स \to \infty}{\text{सी}} \frac{\text{ज्या}\left(\frac{अ}{म}\right)}{\left(\frac{अ}{स}\right)}$$

$$= अ. \underset{\left(\frac{अ}{स}\right) \to ०}{\text{सी}} \frac{\text{ज्या}\left(\frac{अ}{स}\right)}{\left(\frac{अ}{स}\right)}$$

$$= अ. १$$

$$= अ$$

उदाहरण २— ज्या ३०′ चे ठोकळ मान काढा.

$$\text{आता, } ३०' = \frac{१}{२}$$

$$= \left(\frac{\text{प्या}}{१८० \times २}\right)^{\text{आ}}$$

$$\text{ज्या}३०' = \text{ज्या } \left(\frac{\text{प्या}}{३६०}\right)$$

$$= \frac{\text{प्या}}{३६०} \quad \text{जवळजवळ}$$

$$= \frac{३.१४१५९}{३६०}$$

$$= .००८७२६६ \text{ जवळजवळ.}$$

उदाहरणसंग्रह ५.

ढोबळ मान काढा:—

(१) कोज्या ३०' (२) ज्या २०'

(३) व्युज्ज्या १०" (४) व्युत्कोज्या १'

(५) कोस्प ८९°

पुढील समीकार ढोबळ मानाने सोडवा:—

(६) स्प अ = ·०१ (७) ज्या अ = ·००२

(८) अ आरीय मापांत असेल तर

$$\underset{स \to \infty}{सी}\left[स\ स्प\left(\frac{अ}{स}\right)\right] = अ$$ हें सिद्ध करा.

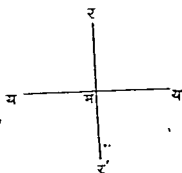
(९) सहा पाद उंचीच्या खांबाने १ क्रोशाक (mile) अंतरावर आपातित केलेला कोण काढा.

(१०) ८० यार्डी (yards) अंतरावर डोळ्यापाशीं २०' चा कोण आपातित करणाऱ्या काठीची लांबी काढा.

प्रकरण चवथें

त्रिकोणमितीय निष्पत्तींचीं विचरणें (variations)

४·१ धन आणि ऋण रेषा.



आ ४.१

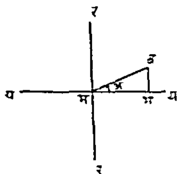
कोण धन किंवा ऋण कसे असू शकतात हें पहिल्या प्रकरणांत आपण पाहिलें आहे. आता समतलांतील रेषांच्या दिशाहि धन किंवा ऋण कशा असू शकतात हें आपण पाहू.

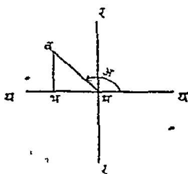
यमय' व रमर' या दोन रेषा एकमेकांस लम्ब असून म बिंदूंत छेदतात. रूढीनुसार, रर' पासून उजवीकडे जाणाऱ्या व य'य ला समान्तर (parallel) असलेल्या सरळ रेषा धन, आणि रर' पासून डावीकडे जाणाऱ्या व यय' ला समान्तर असलेल्या सरळ रेषा ऋण समजल्या जातात. त्याचप्रमाणे र'र ला समांतर व यय' पासून वर जाणाऱ्या

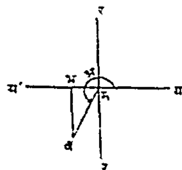
सरळ रेषा धन आणि रर' ला समांतर व यय' पासून खाली जाणाऱ्या रेषा ऋण समजल्या जातात.

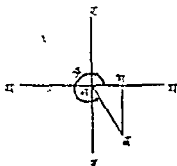
४.२ कोणत्याहि कोनाच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती·

दुसऱ्या प्रकरणांत आपण न्यूनकोनाच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती परिभाषित केल्या. आता आपण कोणत्याहि कोनाच्या









आ. ४.२

यय', रर' हे एकमेकांना लंब असणारे व्यास या वृत्ताचे चार चरणांत विभाग करतात. मय$_1$, मय$_2$, मय$_3$, मय$_4$ या सदिश त्रिज्येच्या चार चरणांतल्या स्थिती आहेत.

यय' वर य$_1$भ$_1$, य$_2$भ$_2$, य$_3$भ$_3$ व य$_4$भ$_4$ हे लम्ब काढा.

पहिल्या चरणांत भ$_1$य$_1$ व मभ$_1$ या दोन्ही रेषा धन आहेत. म्हणून सर्व त्रिकोणमितीय निष्पत्ती धन आहेत.

दुसऱ्या चरणांत भ$_2$य$_2$ धन आहे, पण मभ$_2$ ऋण आहे. म्हणून ज्या ही, भ$_2$य$_2$ व मय$_2$ या दोन धन राशींची निष्पत्ति असल्यामुळे, धन आहे; परंतु कोटिज्या ही, ऋण राशि मभ$_2$ व धन राशि मय$_2$ यांची निष्पत्ति असल्यामुळे, ऋण आहे. स्पर्शज्या ही, धन राशि भ$_2$य$_2$ व ऋण राशि मभ$_2$ यांची निष्पत्ति असल्यामुळे, ऋण आहे.

तिसऱ्या चरणांत भ$_3$य$_3$ व मभ$_3$ या दोन्ही रेषा ऋण आहेत. म्हणून ज्या आणि कोटिज्या ऋण आहेत, पण स्पर्शज्या धन आहे.

चवथ्या चरणांत भ$_4$य$_4$ ऋण आहे, पण मभ$_4$ धन आहे. म्हणून ज्या ऋण आहे, कोटिज्या धन आहे व स्पर्शज्या ऋण आहे.

ज्याअर्थी व्युत्क्रमज्या ज्येची व्युत्क्रम असते त्याअर्थी कोणत्याहि चरणांत व्युत्क्रमज्येचे चिन्ह ज्येच्या चिन्हाप्रमाणेच असले पाहिजे हे स्पष्ट आहे. तसेच व्युत्क्रमकोटिज्या व कोटिज्या यांची चिन्हे नेहमी समान, आणि कोटिस्पर्शज्या व स्पर्शज्या यांचीहि चिन्हे नेहमी समान असली पाहिजेत.

म्हणून तीन प्रमुख त्रिकोणमितीय निष्पत्तींचीं चिन्हें माहीत असल्यास सर्व त्रिकोणमितीय निष्पत्तींचीं चिन्हें माहीत होतात.

पुढील सारणी लक्षांत ठेवल्यास आपणांस सर्व निष्पत्तींचीं चिन्हें वाढतां येतील.

	र	
	ज्या +	ज्या +
	कोज्या −	कोज्या +
	स्प −	स्प +
य′	म	य
	ज्या −	ज्या −
	कोज्या −	कोज्या +
	स्प +	स्प −
	र′	

४·२ आता आपण अ चें शून्यापासून २ प्या पर्यंत सतत विचरण होत असतांना, होणारीं ज्या अ चीं विचरणें अनुरेखूं.

मागील अनुच्छेदांतील आकृति पहा

समजा त्र ही वृत्ताची त्रिज्या आहे.

पहिला चरणः— ज्या अ $= \frac{\text{भ}_1\text{व}_1}{\text{त्र}}$ अ शून्यापासून $\frac{\text{प्या}}{२}$ पर्यंत जसजसा वाढतो, तसतशी भ,व, शून्यापासून त्र पर्यंत सतत मोठी होत जाते म्हणून ज्या अ शून्यापासून एक पर्यंत सतत वाढते.

दुसरा चरणः— ज्या अ = $\frac{म_2 य_2}{त्र}$. जेव्हा अ चें $\frac{\pi}{2}$

पासून π पर्यंत विचरण होतें, तेव्हा $म_2 य_2$ त्र पासून शून्या-पर्यंत विचरण होतें, तेव्हा $म_2 य_2$ त्र पासून शून्यापर्यंत लहान होते. म्हणून ज्या अ एक पासून शून्यापर्यंत कमी होते.

तिसरा चरणः— ज्या अ = $\frac{म_3 य_3}{त्र}$. अ चें जसें π

पासून $\frac{3\pi}{2}$ पर्यंत विचरण होतें तशी $म_3 य_3$ शून्यापासून −त्र पर्यंत कमी होते. म्हणून ज्या अ शून्या पासून −१ पर्यंत कमी होते.

चवथा चरणः— ज्या अ = $\frac{म_4 य_4}{त्र}$. अ चें जसें

$\frac{3\pi}{2}$ ते 2π पर्यंत विचरण होतें तशी $म_4 य_4$ त्र ते शून्यापर्यंत वाढते. म्हणून ज्या अ —१ पासून शून्यापर्यंत वाढते.

४५ आवर्तीय त्रितें (periodic functions)

सदिश त्रिज्येचें एक परिभ्रमण पूर्ण झाल्यावर कोणाचें मान २π पासून ४π पर्यंत वाढते, अशा वेळीं ज्या त्याच म्हणजे पूर्वीच्याच विचरण थेर्ढीतून जाते. कोणत्याहि दोन कोणांतील फरक ४ लंबकोण म्हणजेच २π आर इतका

असल्यास दोन्ही कोनांकरिता सदिश त्रिज्येची स्थिति एकच असेल. म्हणून २ प्या इतका फरक असलेल्या कोणत्याहि दोन कोनांची ज्या एकच असेल. यावरून, ज्या हें एक आवर्तीय थिंत आहे व तिचा आवर्तकाल (period) २ प्या आहे हें दिसून येईल. त्याचप्रमाणे सर्व त्रिकोणमितीय निष्पत्ती आवर्तीय थिंतें आहेत आणि, स्पर्शज्या व कोटिस्पर्शज्या सोडल्यास, सर्वांचा आवर्तकाल २ प्या आहे. स्पर्शज्या व कोटिस्पर्शज्या यांच्या अर्हा (values) परिभ्रमणरेषेच्या प्रत्येक अर्धभ्रमणानंतर पुनरावृत्त होतात हें लवकरच दिसून येईल. म्हणून स्पर्शज्या व कोटिस्पर्शज्या यांचा आवर्तकाल प्या आहे.

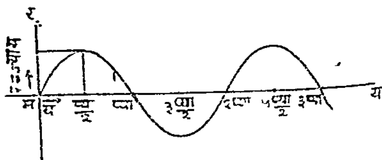
४.६ ज्या—बिंदुरेख (sine graph) किंवा र = ज्या य या समीकाराचा बिंदुरेखा.

मय व मर या एकमेकांस लंब असणाऱ्या सरळ रेषा म बिंदुत छेदतात. मय वर य आणि मर वर ज्या य च्या संवादी अर्हा मापा. य च्या योग्य अर्हा उदाहरणार्थ ०, $\frac{\text{प्या}}{२}$,......३ प्या निवडून आणि ज्या य च्या संवादी अर्हा काढून त्या खालील सारणीच्या रूपांत लिहिल्या आहेत.

य	०	$\frac{\text{प्या}}{२}$	प्या	$\frac{३\text{प्या}}{२}$	२प्या	$\frac{५\text{प्या}}{२}$	३प्या
ज्या य	०	१	०	−१	०	१	०

य करिता $\frac{\text{प्या}}{2}$, आर = २ शतिमान आणि र किंवा ज्या य

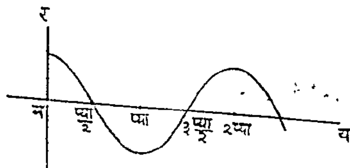
करिता १ = १ शतिमान हें प्रमाण घेऊन, य आणि ज्या य ची संवादी अर्हा, अशा युग्मांमुळे मिळणाऱ्या बिंदूंचें अंकन करा. हे सर्व बिंदू एका सतत (continuous) वक्रावर (curve) आहेत हें दिसून येईल. या वक्रास ज्या-बिंदुरेख किंवा



आ. ४.४

र = ज्या य चा बिंदुरेख म्हणतात. हा बिंदुरेख य आणि ज्या य यांच्या योग्य अर्हा घेतल्यास मध ज्या ऋण बाजूसहि काढतां येतो.

४.७ वर दिल्याप्रमाणेच अ चें जेव्हा शून्यापासून २ प्या पर्यंत विचरण होतें तेव्हा कोज्या अ ची होणारी विचरणें काढा व र = कोज्या य हा विदुरेख काढा.



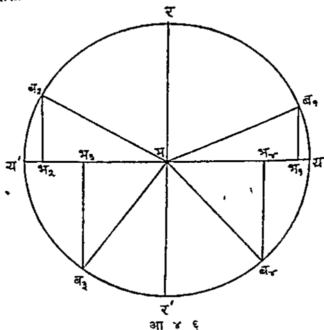
आ. ४.५

हा विदुरेख आकृतींत दाखविल्याप्रमाणे येईल.

४.८ आता आपण अ चें शून्यापासून २ प्या पर्यंत विचरण होत असतांना होणारी स्प अ ची विचरणें देऊं.

पहिला चरणः— यांत स्प अ $= \frac{\text{अ}_1\text{य}_1}{\text{म अ}_1}$

अ शून्य असतो तेव्हा $भ_1य_1$ शून्यासमान आणि $मभ_1 = त्र$ असते.



आ ४ ६

$$\therefore \quad स्प\ अ = \frac{0}{त्र} = 0$$

अ जेव्हा शून्यापासून $\frac{प्या}{२}$ पर्यंत वाढतो, तेव्हा $भ_1य_1$ मध्ये सतत वाढ होते उलट $मभ_1$ कमी होते, म्हणून $\frac{भ_1य_1}{मभ_1}$,

अर्थात् स्प अ, सतत वाढत जाते.

जेव्हा $अ = \frac{प्या}{२}$, तेव्हा $भ_१य_१ = त्र$ व $मभ_१ = ०$

$\therefore$ $स्प अ = \infty$

यावरून पहिल्या चरणांत स्पअ शून्यापासून ∞पर्यंत सतत वाढते हें दिसून येईल.

दुसरा चरणः— दुसऱ्या चरणांत अ जेव्हा $\frac{प्या}{२}$ पासून प्या पर्यंत वाढतो, तेव्हा $भ_२य_२$ त्र पासून शून्यापर्यंत कमी होते, उलट $मभ_२$ ऋण राहून संख्येने शून्यापासून त्र पर्यंत वाढते.

$$आता\ स्प अ = \frac{भ_२य_२}{मभ_२}$$

$\therefore$ $अ = \frac{प्या}{२}$ + उपेक्षणीय अल्पसंख्या असते.

तेव्हा $स्प अ = \frac{-त्र}{०} = -\infty$ (जवळजवळ)

आणि, $अ = प्या$ असतो,

तेव्हा $स्प अ = \frac{०}{-त्र} = ०$.

म्हणून स्प अ बैजिक रित्या (algebraically) $-\infty$ पासून शून्यापर्यंत वाढते.

अ $\frac{\text{प्या}}{2}$ ही अर्हा घेण्याच्या किंचित् अगोदर, स्प अ धन असून अतिशय मोठी असते. उलट तो $\frac{\text{प्या}}{2}$ च्या पुढे थोडासा गेल्यावरोबर स्प अ ऋण होऊन संख्येने फार मोठी होते.

यावरून अचें विचरण पहिल्या चरणांतून दुसऱ्या चरणांत होत असतां अ जेव्हा $\frac{\text{प्या}}{2}$ ही अर्हा घेतो तेव्हा स्प अ च्या अर्हांत एकाएकीं खंड पडतो हें दिसून येईल.

तिसरा चरणः— तिसऱ्या चरणांत $\text{म}_3\text{य}_3$ व मम_3 या दोन्ही ऋण असतात आणि $\text{म}_3\text{य}_3$ संख्येने शून्यापासून त्र पर्यंत वाढत जाते, उलट मम_3 संख्येने त्र पासून शून्यापर्यंत कमी होते.

म्हणून $\text{स्प अ} = \frac{\text{म}_3\text{य}_3}{\text{मम}_3}$ धन राहून शून्यापासून अनंतापर्यंत वाढते.

चवथा चरणः— चवथ्या चरणांत $\text{म}_4\text{य}_4$ ऋण असून संख्येने त्र पासून शून्यापर्यंत कमी होते, उलट मम_4 धन असून शून्यापासून त्र पर्यंत वाढते.

म्हणून स्प अ $= \frac{म_१ य_१}{मभ_१}$, बैजिक रित्या $-\infty$ पासून शून्यापर्यंत वाढते.

$\frac{३प्या}{२}$ नून अ जात असतां स्प अ च्या अर्हचें $+\infty$तून $-\infty$ त एकदम विचरण होतें आणि स्प अ च्या अर्हांत आपसी एक खंड पडतो.

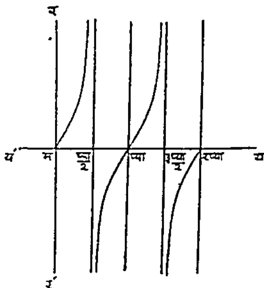
४.८१ स्पर्शज्या-बिंदुरेख किंवा र = स्पय चा बिंदुरेख.

य	०	$\frac{प्या}{२}-०$	$\frac{प्या}{२}+०$	प्या	$\frac{३प्या}{२}-०$	$\frac{३प्या}{३}+०$	२प्य
स्पय	०	∞	$-\infty$	०	∞	$-\infty$	०

वरील सारणींत य च्या शून्यापासून २प्या पर्यंत होणाऱ्या परिवर्तनामुळे स्प य मध्ये होणारी परिवर्तनें दिलीं आहेत. या सारणीवरुन दिसून येईल की य चें प्या ते २प्या पर्यंत विचरण होत असतांना येणाऱ्या स्प य च्या अर्हा त्याचें शून्य ते प्या पर्यंत विचरण होत असतांना येणाऱ्या स्प य च्या अर्हा-समान आहेत. म्हणून स्प य चा आवर्तकाल प्या आहे.

य कोणाच्या महत्ता मय वर निरूपिल्या (represented) आहेत. तसेंच स्प य च्या धन अर्हा मर वर व ऋण अर्हा मर' वर निरूपिल्या आहेत. या अर्हांच्या साह्यानें बिंदूंचें अंकन करून र = स्पय चा बिंदुरेख आकृतींत दाखविल्याप्रमाणे काढतां येतो हा यक्र य च्या २प्या हून अधिक अर्हांकरिता

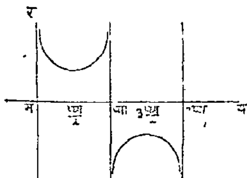
तसेंच य च्या ऋण अर्हांकरितांहि वाढवितां येतो.



आ ४.७

४.९ व्युत्क्रमज्या बिंदुरेख.

आकृतींत य च्या शून्यापासून २प्या पर्यंतच्या अर्हा घेऊन येणारा र – व्युज्ज्या य चा बिंदुरेख दाखविला आहे.



आ. ४.८

उदाहरणें

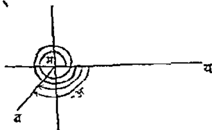
अ शून्यापासून २ प्या पर्यंत विचरतांना होणारी व्युत्कोज्या अ व कोस्प अ चीं विचरणें रेखा व

(१) र = व्युत्कोज्या य आणि

(२) र = कोस्प य यांचे बिंदुरेख काढा.

यावरून अशा दोन कोनांच्या सर्व त्रिकोणमितीय निष्पत्ती महत्तेत तसेंच चिन्हांतहि एकच असल्या पाहिजेत.

म्हणून ३६०°. स + अ आणि अ यांच्या निष्पत्ती एकच असतात.



आ. ५.२

तसेंच, ३६०°. स − अ या कोणाच्या निष्पत्ती व − अ च्या निष्पत्ती एकच असल्या पाहिजेत.

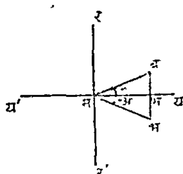
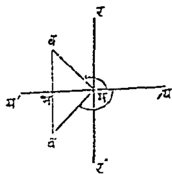
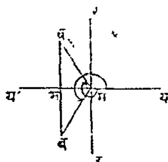
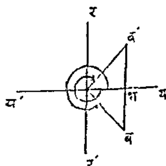
उपसाध्य:— ३६०° च्या व ०°च्या निष्पत्ती एकच असतात.

५.२ अ चें मान कोणतेंहि असतांना, − अ कोणाच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती अ च्या निष्पत्तींच्या रूपांत काढणें.

समजा परिभ्रमणरेषा मय पासून निघून धन दिशेनें अ इतका यमय हा कोन रेखिते, तसेंच ऋण दिशेनें यमय' हा अ इतकाच कोन रेखितें.

∴ ∠यमय' = − अ

मय वील य या कोणत्याहि बिंदूतून मय (वा मय') ला यभ हा लम्ब काढा, व तो वाढवून मय' ला य' मधे छेदूं द्या.

आ. ५.३

मव च्या चार चरणांतील स्थितीनुसार चार प्रकारच्या आकृत्या काढल्या आहेत.

घमम व व'मम या लंबकोण त्रिकोणांत, मभ रेषा साधारण आहे; व ∠ममव = ∠भमव'

म्हणून हे दोन त्रिकोण सर्वांगसम (congruent) आहेत.

म्हणून वरील चार पैकी प्रत्येक आकृतींत रेषांचीं चिन्हें विचारांत घेतल्यास,

$$\text{मव}' = \text{मव}$$

$$\text{आणि } \text{भव}' = -\text{भव}$$

म्हणून, परिभाषेवरून,

$$\text{ज्या}(-\text{अ}) = \frac{\text{भव}'}{\text{मव}'} = \frac{-\text{भव}}{\text{मव}} = -\text{ज्या अ}$$

$$\text{व कोज्या } (-\text{अ}) = \frac{\text{मभ}}{\text{मव}'} = \frac{\text{मभ}}{\text{मव}} = \text{कोज्या अ}$$

$$\text{स्प } (-\text{अ}) = \frac{\text{ज्या } (-\text{अ})}{\text{कोज्या } (-\text{अ})} = \frac{-\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} = -\text{स्प अ}$$

$$\text{आणि व्युज्ज्या } (-\text{अ}) = -\text{व्युज्ज्या अ}$$

$$\text{व्युत्कोज्या } (-\text{अ}) = \text{व्युत्कोज्या अ}$$

$$\text{कोस्प } (-\text{अ}) = -\text{कोस्प अ}$$

उदाहरण— $\text{ज्या } (-\text{४५}) = -\text{ज्या ४५}^\circ = -\frac{\text{१}}{\sqrt{\text{२}}}$

$$\text{स्प } (\text{३६०}^\circ - \text{३०}^\circ) = \text{स्प } (-\text{३०}^\circ) = -\text{स्प ३०}^\circ = -\frac{\text{१}}{\sqrt{\text{३}}}$$

$$\text{कोज्या } (-\text{६०}^\circ) = \text{कोज्या ६०}^\circ = \frac{\text{१}}{\text{२}}$$

५·३ श्रिताची परिभाषा.

कोणतीहि पदसंहति (expression) चल (variable) राशि आणि अचल (constant) राशि यांची बनलेली असते. चलराशीच्या निरनिराळ्या अर्हांनुसार पदसंहतीची अर्हाहि बदलत जाते. एखाद्या पदसंहतींत य ही चल राशि असल्यास त्या पदसंहतीला य चें श्रित (function) म्हणतात.

य चें श्रित श्रि(य) असें लिहितात. श्रि(य) या य च्या श्रितांत य ऐवजी –य लिहून त्याची महत्ता व चिन्ह बदलत नसल्यास त्याला य चें सम (even) श्रित म्हणतात

श्रि(य) समश्रित असल्यास,

श्रि(–य) = श्रि(य)

य च्या जागीं –य लिहून श्रि(य) चें चिन्ह बदलत असेल पण त्याची महत्ता पूर्वीइतकीच रहात असेल तर त्याला य चें विषम (odd) श्रित म्हणतात.

श्रि(य) विषम श्रित असल्यास,

श्रि (–य) = – श्रि (य)

मागील अनुच्छेदावरून असें दिसून येईल की कोज्या य व व्युत्कोज्या य हीं य चीं सम श्रितें असून ज्या य, व्युज्ज्या य, स्प य, कोस्प य य चीं विषम श्रितें आहेत

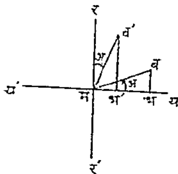
५·४ अ चें मान कोणतेंहि असतांना, ९०° – अ अथवा $\frac{\text{प्या}}{२}$ – अ कोणाच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती अ च्या निष्पत्तींच्या रूपांत काढणें.

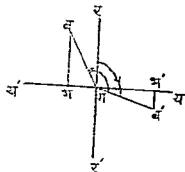
मर ही एक परिभ्रमणरेषा यमव हा अ समान कोण रेखिते. मर' ही दुसरी परिभ्रमणरेषा मय पासून निघून यमर

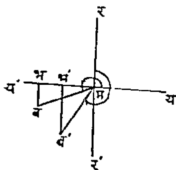
हा ९०° चा कोण रेखिते व नंतर रमव' = अ हा कोण घटीवत् दिशेने रेखिते.

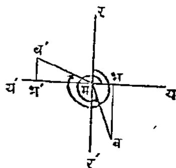
$\therefore$ ∠यमव' = ९०° − अ

मव आणि मव' या रेषांवर म पासून समान अंतरावर अनुक्रमें व आणि व' हे बिंदू घ्या आणि मय (वा मय') ला वभ आणि व'भ' हे लंब काढा.









आ. ५.४

आता, $\angle$यमव व $\angle$रमय' यांची महत्ता समान आहे.

म्हणून $\angle$भमव = $\angle$मर'भ'

शिवाय मर = मर'

म्हणून वमभ व मय'म' हे दोन लंबकोण त्रिकोण सर्वांगसम आहेत. म्हणून या दोन त्रिकोणांतील संवादी बाजू समान महत्तेच्या असल्या पाहिजेत.

म्हणून, सर्व आकृत्यांत, चिन्हें विचारांत घेऊन,

भ'व' = मभ,

मम' = भव,

मर' = मर

म्हणून, परिभाषेनुसार,

$$ज्या(९०^\circ - अ) = ज्या\angle यमर' = \frac{भ'व'}{मव'} = \frac{मभ}{मव} = कोज्या\ अ$$

$$कोज्या\ (९०^\circ - अ) = कोज्या\angle यमर' = \frac{मम'}{मव'} = \frac{मर}{मर} = ज्या\ अ$$

$$\therefore स्प(९०^\circ - अ) = \frac{ज्या(९०^\circ - अ)}{कोज्या\ (९०^\circ - अ)} = \frac{कोज्या\ अ}{ज्या\ अ} = कोस्प\ अ$$

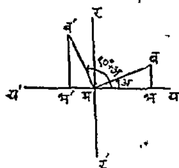
आणि व्युज्ज्या $(९०^\circ - अ)$ = व्युत्कोज्या अ,

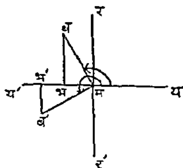
व्युत्कोज्या $(९०^\circ - अ)$ = व्युज्ज्या अ,

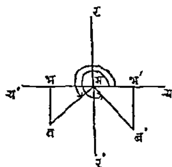
कोस्प $(९०^\circ - अ)$ = स्प अ

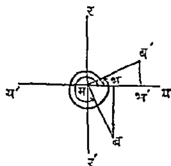
५.५ अ चें मान कोणतेंहि असतांना, $९०^\circ + अ$ अथवा $\frac{प्या}{२} + अ$ कोणाच्या निष्पत्ती अ च्या निष्पत्तींच्या रूपांत काढणें.

मय ही परिभ्रमणरेषा मय पासून निघून यमव हा अ समान घन कोण रेखिते. नंतर ती त्याच दिशेने एका लंब कोणाइतके भ्रमण करून मव' या स्थितीत येते.









आ. ५. ५.

$\therefore \angle$ यमव' $= ९०^{\circ} +$ अ

मव आणि मव' या रेषांवर म पासून समान अंतरावर

य आणि य' बिंदू घ्या व मय (वा मय') ला यभ आणि य'भ' हे लंब काढा.

आता मभय व मभ'य' त्रिकोण सर्वांगसम आहेत, व म्हणून त्यांच्या संवादी बाजू समान आहेत.

म्हणून, योग्य चिन्हें घेऊन, चारहि आकृत्यांत,

$$\text{मय}' = \text{मय},$$

$$\text{भ}'\text{य}' = \text{मभ},$$

$$\text{व मभ}' = -\text{भय}$$

$$\therefore \text{ज्या } (९०^\circ + \text{अ}) = \frac{\text{भ}'\text{य}'}{\text{मय}'} = \frac{\text{मभ}}{\text{मय}} = \text{कोज्या अ}$$

$$\text{कोज्या } (९०^\circ + \text{अ}) = \frac{\text{मभ}'}{\text{मय}'} = \frac{-\text{भय}}{\text{मय}} = -\text{ ज्या अ}$$

$$\therefore \text{ स्प } (९०^\circ + \text{अ}) = \frac{\text{ज्या}(९०^\circ + \text{अ})}{\text{कोज्या}(९०^\circ + \text{अ})} = \frac{\text{कोज्या अ}}{-\text{ज्या अ}}$$

$$= -\text{कोस्प अ}$$

$$\text{आणि व्युज्ज्या } (९०^\circ + \text{अ}) = \text{व्युत्कोज्या अ},$$

$$\text{व्युत्कोज्या } (९०^\circ + \text{अ}) = -\text{व्युज्ज्या अ},$$

$$\text{कोस्प } (९०^\circ + \text{अ}) = -\text{ स्प अ}$$

उदाहरण— १२०° च्या निष्पत्ती काढा.

$$\text{ज्या } (१२०^\circ) = \text{ज्या}(९०^\circ + ३०^\circ) = \text{कोज्या}३०^\circ = \frac{\sqrt{३}}{२}$$

कोज्या (१२०°) = कोज्या$(९०^\circ + ३०^\circ)$ = $-$ ज्या३०°

$$= -\frac{१}{२}$$

स्प (१२०°) = स्प$(९०^\circ + ३०^\circ)$ = $-$ कोस्प३०° = $-\sqrt{३}$

१२०° च्या बाकीच्या निष्पत्ती आता लिहितां येतील

५·६ अ चें कोणतेंहि मान असतांना, $१८०^\circ -$ अ अथवा ध्या $-$ अ कोणाच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती अ च्या निष्पत्तींच्या रूपांत काढणें.

५·४ व ५·५ या अनुच्छेदांच्या साह्यानें आपण $१८०^\circ -$ अ च्या निष्पत्ती काढूं शकतों.

ज्या $(१८०^\circ -$ अ$)$ = ज्या $(९०^\circ + \overline{९०^\circ - \text{अ}})$

= कोज्या $(९०^\circ -$ अ$)$

(अनु. ५·१ वरुन)

= ज्या अ

(अनु ५·४ वरुन)

कोज्या $(१८०^\circ -$ अ$)$ = कोज्या $(९०^\circ + \overline{९०^\circ - \text{अ}})$

= $-$ ज्या $(९०^\circ -$ अ$)$

(अनु ५·१ वरुन)

= $-$ कोज्या अ

(अनु. ५·३ वरून)

तसेंच, $स्प (१८०^\circ - अ) = स्प (९०^\circ + \overline{९०^\circ - अ})$

$= - कोस्प (९०^\circ - अ)$

$= - स्प अ$

आणि, व्युज्ज्या $(१८०^\circ - अ) =$ व्युज्ज्या अ,

व्युत्कोज्या $(१८०^\circ - अ) = -$ व्युत्कोज्या अ,

कोस्प $(१८०^\circ - अ) = -$ कोस्प अ

अभ्यासः— वरील संबंध आकृति काढून रैखिर्गाने सिद्ध करा.

उदाहरण १— १८०° च्या निष्पत्ती काढा.

ज्या $(१८०^\circ) =$ ज्या $(१८०^\circ - ०^\circ) =$ ज्या $०^\circ = ०$

कोज्या $(१८०^\circ) =$ कोज्या $(१८०^\circ - ०^\circ) = -$ कोज्या $०^\circ = -१$

स्प $(१८०) =$ स्प $(१८० - ०^\circ) = -$ स्प $० = ०$, वगैरे.

उदाहरण २— १३५ च्या निष्पत्ती काढा.

$$ज्या (१३५^\circ) = ज्या (१८०^\circ - ४५^\circ) = ज्या ४५^\circ = \frac{१}{\sqrt{२}}$$

$$कोज्या (१३५^\circ) = कोज्या (१८०^\circ - ४५^\circ)$$

$$= - कोज्या ४५ = - \frac{१}{\sqrt{२}}$$

$$स्प (१३५^\circ) = स्प (१८०^\circ - ४५^\circ) = - स्प ४५^\circ = -१$$

उदाहरण ३— १५०° च्या निष्पत्ती काढा.

$$ज्या (१५०^\circ) = ज्या (१८०^\circ - ३०^\circ) = ज्या ३० = \frac{१}{२}$$

$$\text{कोज्या }(१५०^\circ) = \text{कोज्या }(१८०^\circ - ३०^\circ)$$

$$= -\text{कोज्या } ३०^\circ = -\frac{३}{\sqrt{२}}$$

$$\text{स्प }(१५०^\circ) = \text{स्प }(१८०^\circ - ३०^\circ) = -\text{स्प } ३०^\circ = -\frac{१}{\sqrt{३}}$$

टीप— १२०,° १३५,° १५०° च्या निष्पत्ती ५.५ अनुच्छेदानेहि काढतां येतात.

५.७ अ चें कोणतेंहि मान असतांना, १८०° + अ अथवा प्या + अ कोणाच्या निष्पत्ती अ च्या निष्पत्तींच्या रूपांत काढणें.

या निष्पत्ती ५.५ अनुच्छेदाचा उत्तरोत्तर उपयोग करून काढतां येतात.

$$\text{ज्या }(१८०^\circ + \text{अ}) = \text{ज्या }(९०^\circ + \overline{९०^\circ + \text{अ}})$$

$$= \text{कोज्या }(९०^\circ + \text{अ}) = -\text{ज्या अ}$$

$$\text{कोज्या }(१८०^\circ + \text{अ}) = \text{कोज्या }(९०^\circ + \overline{९०^\circ + \text{अ}})$$

$$= -\text{ज्या }(९०^\circ + \text{अ}) = -\text{कोज्या अ}$$

$$\text{स्प }(१८०^\circ + \text{अ}) = \text{स्प }(९०^\circ + \overline{९०^\circ + \text{अ}})$$

$$= -\text{कोस्प }(९०^\circ + \text{अ}) = \text{स्प अ}$$

आणि व्युज्ज्या (१८०° + अ) = − व्युज्ज्या अ

व्युत्कोज्या (१८०° + अ) = − व्युत्कोज्या अ

कोस्प (१८०° + अ) = कोस्प अ

अभ्यासः— १८०° + अ च्या निष्पत्ती आकृति काढून रेखिकीने काढा.

५.८ उदाहरण— २७०°−अ व २७०° + अ या कोणांच्या निष्पत्ती काढा.

या कोणांच्या तीन प्रमुख निष्पत्ती काढल्यास त्यावरून बाकीच्या निष्पत्ती सहज लिहितां येतील.

ज्या (२७०° − अ) = ज्या (१८०° + ९०° − अ)
= − ज्या (९०° − अ) = − कोज्या अ

कोज्या (२७०° − अ) = कोज्या (१८०° + ९०° − अ)
= − कोज्या (९०° − अ) = − ज्या अ

स्प (२७०° − अ) = स्प (१८०° + ९०° − अ)
= स्प (९०° − अ) = कोस्प अ

ज्या (२७०° + अ) = ज्या (१८०° + ९०° − अ)
= − ज्या (९०° + अ) = − कोज्या अ

कोज्या (२७०° + अ) = कोज्या (१८०° + ९०° + अ)
= − कोज्या (९०° + अ) = ज्या अ

स्प (२७०° + अ) = स्प (१८०° + ९०° + अ)
= स्प (९०° + अ) = − कोस्प अ

अन्यथा:—

ज्या (२७०° – अ) = ज्या (३६०° – ९०° – अ)

= ज्या (– ९०° – अ) = – ज्या (९०° + अ) = – कोज्या अ

इत्यादि.

कोज्या (२७०° + अ) = कोज्या (३६०° – ९०° + अ)

= कोज्या (– ९०° + अ)

= कोज्या (९०° – अ)

= ज्या अ इत्यादि.

५.९ आता आपण नमुन्यादाखल कांही उदाहरणें सोडवूं.

उदाहरण १— ज्या (१५६०°) व कोस्प (–४०५°) काढा.

ज्या (१५६०°) = ज्या (४ × ३६०° + १२०°) = ज्या १२०°

= ज्या (१८०° – ६०°) = ज्या ६०° = $\frac{\sqrt{३}}{२}$

कोस्प (– ४०५°) = – कोस्प (४०५°)

= – कोस्प (३६०° + ४५°)

= – कोस्प ४५° = – १

उदाहरण २—

$$\frac{[\text{स्प } ४५^\circ + \text{स्प } (\text{प्या} + \text{अ})]\ [\text{कोस्प } ४०५^\circ + \text{कोस्प}(\frac{\text{प्या}}{२} + \text{अ})]}{[\text{कोज्या अ} + \text{ज्या}(\text{प्या} - \text{अ})]\ [\text{ज्या}(\frac{\text{प्या}}{२} + \text{अ}) + \text{ज्या}(\text{प्या} + \text{अ})]}$$

यांस सरळ रूप द्या (simplify) आणि $अ = \frac{\text{π}}{६}$

असल्यास त्याचें मान $\frac{४}{३}$ होतें हें दाखवा.

दिलेली पदसंहति

$$= \frac{(१ + \text{स्प अ})\left[\text{कोस्प}(३६०^\circ + ४५^\circ) - \text{स्पअ}\right]}{(\text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ})(\text{कोज्या अ} - \text{ज्या अ})}$$

$$= \frac{(१ + \text{स्प अ})(१ - \text{स्प अ})}{\text{कोज्या}^२\text{अ} - \text{ज्या}^२\text{अ}}$$

$$= \frac{१ - \text{स्प}^२\text{अ}}{\text{कोज्या}^२\text{अ} - \text{ज्या}^२\text{अ}}$$

$$= \frac{१ - \frac{\text{ज्या}^२\text{अ}}{\text{कोज्या}^२\text{अ}}}{\text{कोज्या}^२\text{अ} - \text{ज्या}^२\text{अ}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या}^२\text{अ} - \text{ज्या}^२\text{अ}}{\text{कोज्या}^२\text{अ}} \times \frac{१}{\text{कोज्या}^२\text{अ} - \text{ज्या}^२\text{अ}}$$

$$= \frac{१}{\text{कोज्या}^२\text{अ}} = \text{व्युत्कोज्या}^२\text{अ}$$

आता $अ = \frac{\text{π}}{६}$ असल्यास,

ही पदसंहति = व्युत्कोज्या^{2} $\frac{\text{प्या}}{६}$ = $\frac{१}{\text{कोज्या}^2 \frac{\text{प्या}}{६}}$

$$= \frac{१}{(\sqrt{\frac{३}{२}})^२} = \frac{४}{३}$$

उदाहरण ३— सिद्ध कराः—

$$\left[\text{ज्या}^2 \left(\frac{\text{प्या}}{१२}\right) + \text{ज्या}^2 \left(\frac{३\text{प्या}}{१२}\right) + \text{ज्या}^2 \left(\frac{५\text{प्या}}{१२}\right) + \text{ज्या}^2 \left(\frac{७\text{प्या}}{१२}\right) + \text{ज्या}^2 \left(\frac{९\text{प्या}}{१२}\right) + \text{ज्या}^2 \left(\frac{११\text{प्या}}{१२}\right)\right] = ३$$

आता $\text{ज्या}\left(\frac{११\text{प्या}}{१२}\right) = \text{ज्या}\left(\text{प्या} - \frac{\text{प्या}}{१२}\right) = \text{ज्या}\left(\frac{\text{प्या}}{१२}\right)$

$\text{ज्या}\left(\frac{९\text{प्या}}{१२}\right) = \text{ज्या}\left(\text{प्या} - \frac{३\text{प्या}}{१२}\right) = \text{ज्या}\left(\frac{३\text{प्या}}{१२}\right)$

$\text{ज्या}\left(\frac{७\text{प्या}}{१२}\right) = \text{ज्या}\left(\text{प्या} - \frac{५\text{प्या}}{१२}\right) = \text{ज्या}\left(\frac{५\text{प्या}}{१२}\right)$

म्हणून वामपक्ष $= २\left[\text{ज्या}^2 \left(\frac{\text{प्या}}{१२}\right) + \text{ज्या}^2 \left(\frac{३\text{प्या}}{१२}\right) + \text{ज्या}^2 \left(\frac{५\text{प्या}}{१२}\right)\right]$

पण $ज्या\left(\frac{५π}{१२}\right)=ज्या\left(\frac{π}{२}-\frac{π}{१२}\right)$

$$=कोज्या\left(\frac{π}{१२}\right)$$

$$\therefore\ वामपक्ष=२\left[\left\{ज्या^२\left(\frac{π}{१२}\right)+कोज्या^२\left(\frac{π}{१२}\right)\right\}+ज्या^२\left(\frac{३π}{१२}\right)\right]$$

$$=२\left[१+ज्या^२\left(\frac{π}{४}\right)\right]$$

$$=२\left[१+\left(\frac{१}{\sqrt{२}}\right)^२\right]$$

$$=२\times\frac{३}{२}$$

$$=३$$

उदाहरण ४— स कोणताहि पूर्णांक (integer) असल्यास, $कोज्या\ (स\ π+अ)=(-१)^स\ कोज्या\ अ$ हें सिद्ध करा.

समजा घ कोणताहि पूर्णांक असून स =२घ समान म्हणजेच एक सम पूर्णांक आहे.

$$\therefore\ कोज्या\ (स\ π+अ)=कोज्या\ (२\ घ\ π+अ)$$

$= \text{कोज्या } (३६०^\circ \cdot घ + अ)$

$= \text{कोज्या } अ$

$= (-१)^{२घ} \text{ कोज्या } अ$

$= (-१)^{स} \text{ कोज्या } अ$

आता, स विषम पूर्णांक असून २घ+१ समान आहे असें समजा.

$\therefore \text{कोज्या } (स\, प्या + अ) = \text{कोज्या}(\overline{२घ + १}प्या + अ)$

$= \text{कोज्या } (२घ\, प्या + \overline{प्या + अ})$

$= \text{कोज्या } (प्या + अ)$

$= -\text{कोज्या } अ$

$= (-१)^{२घ+१} \text{ कोज्या } अ$

$= (-१)^{स} \text{ कोज्या } अ$

म्हणून, स कोणताहि पूर्णांक असतांना,

$\text{कोज्या } (स\, प्या + अ) = (-१)^{स} \text{ कोज्या } अ$

उदाहरणसंग्रह ६

(१) खालील समीकारांचे समाधान करणाऱ्या (satisfy) ०° व ३६०° मधील अ च्या अर्हा काढा.

(क) $\text{ज्या } अ = \frac{१}{२}$; (का) $\text{व्युत्कोज्या } अ = \sqrt{२}$;

(कि) $\text{स्प } अ = -\frac{१}{\sqrt{३}}$

(२) जर क, ख, ग, घ हे एका वृत्तीय (cyclic) चतुर्भुजाचे (quadrilateral) कोण असतील तर कोज्या क + कोज्या ख + कोज्या ग + कोज्या घ = ० हें सिद्ध करा. (कलकत्ता १८६५)

(३) सरळ रूप द्या :—

$$\frac{\text{ज्या } (९०^\circ - \text{अ}) \text{ कोज्या } (-\text{अ}) \text{ स्प } (१८०^\circ + \text{अ})}{[१ + \text{ज्या}(१८०^\circ - \text{अ})][१ - \text{ज्या}(३६०^\circ + \text{अ})]\text{कोस्प}(९०^\circ - \text{अ})}$$

सिद्ध कराः—

(४) ज्या (४८०°) कोज्या (३३०°) + कोज्या (−२४०°) ज्या (−३३०°) $= \frac{१}{२}$

(५) स्प (२४०°) कोज्या (३९०°) + ज्या (८४०°) कोस्प (−३०°) = ०

(६) कोज्या (६००°) कोज्या (५७०°) = ज्या (२४०°) ज्या (६९०°) $= \frac{\sqrt{३}}{४}$

(७) $\text{स्प}\left(\frac{३\text{ प्या}}{२} - \text{अ}\right)$ व्युत्कोज्या (−अ) $\text{ज्या}\left(\frac{\text{प्या}}{२} + \text{अ}\right)$

= कोस्प (प्या − अ) $\text{व्युज्ज्या}\left(\frac{\text{प्या}}{२} - \text{अ}\right)$

× कोज्या (प्या + अ)

(८) $\text{कोज्या}^{५} \frac{\text{प्या}}{२०} + \text{कोज्या}^{५} \frac{३\text{प्या}}{२०} + \text{कोज्या}^{५} \frac{५\text{प्या}}{२०} + \ldots$

$$\ldots + \text{कोज्या}^{५} \frac{१९\text{प्या}}{२०} = ०$$

(९) $\text{स्प}(\text{प्या} + \text{अ}) + \text{स्प}(२\text{प्या} - \text{अ}) + \text{स्प}(३\text{प्या} + \text{अ})$
$+ \text{स्प}(४\text{प्या} - \text{अ}) \ldots\ldots + \text{स्प}\,[(२\text{स} - १)\,\text{प्या} + \text{अ}]$
$+ \text{स्प}(२\text{स}\,\text{प्या} - \text{अ}) = ०$

(१०) स विषम वा सम असेल तदनुसार $\text{ज्या अ} + \text{ज्या}(\text{प्या} + \text{अ}) + \text{ज्या}(२\text{प्या} + \text{अ}) + \ldots\ldots$ स पदांपर्यंत
$= \text{ज्या अ}$
अथवा $= ०$
हें सिद्ध करा.

(११) पुढीलपैकी प्रत्येक पदसंहतीची अर्हा आठ आहे हें दाखवा.

(१) $\text{व्युत्कोज्या}^{२} \left(\frac{\text{प्या}}{४}\right) + \text{व्युत्कोज्या}^{२} \left(\frac{३\text{प्या}}{४}\right)$

$+ \text{व्युत्कोज्या}^{२} \left(\frac{५\text{प्या}}{४}\right) + \text{व्युत्कोज्या}^{२} \left(\frac{७\text{प्या}}{४}\right)$

(२) $\text{व्युज्ज्या} \left(\frac{\text{प्या}}{४}\right) \text{व्युज्ज्या}^{२} \left(\frac{३\text{प्या}}{४}\right) \times$

$\text{व्युज्ज्या} \left(\frac{५\text{प्या}}{४}\right) \text{व्युज्ज्या}^{२} \left(\frac{७\text{प्या}}{४}\right)$

(३) $\Big[\text{व्युत्कोज्या}\,\frac{\text{प्या}}{४} \left(\text{कोज्या}\,\frac{\text{प्या}}{४} + \text{ज्या}\,\frac{\text{प्या}}{४} \right)$

$+ \text{व्युत्कोज्या}\,\frac{३\text{प्या}}{४} \left(\text{कोज्या}\,\frac{३\text{प्या}}{४} - \text{ज्या}\,\frac{३\text{प्या}}{४} \right)$

$+ \text{व्युत्कोज्या}\,\frac{५\text{प्या}}{४} \left(\text{कोज्या}\,\frac{५\text{प्या}}{४} + \text{ज्या}\,\frac{५\text{प्या}}{४} \right)$

$+ \text{व्युत्कोज्या}\,\frac{७\text{प्या}}{४} \left(\text{कोज्या}\,\frac{७\text{प्या}}{४} - \text{ज्या}\,\frac{७\text{प्या}}{४} \right) \Big]$

(१२) स एक धन पूर्णांक असल्यास, आणि

$\text{इ} = \frac{\text{प्या}}{२} - (२\,\text{स} - १)\,\text{इ}$ असल्यास सिद्ध करा की,

$\text{स्पइ स्प३इ स्प५इ} \ldots\ldots \text{स्प}\,(२\,\text{स} - १)\,\text{इ} = १$

प्रकरण सहावें

दिलेली त्रिकोणमितीय निष्पत्ति असलेल्या सर्व कोणांच्या सामान्य पदसंहती

६.१ त्रिकोणमितीय निष्पत्तींचें दिलेलें मान असणाऱ्या कोणांची संख्या अनन्त असते हें मागील प्रकरणावरून स्पष्टपणें दिसून येईल. उदाहरणार्थ, ज्या अ $=\frac{१}{२}$ दिली असल्यास, अ ३०° किंवा त्याचा ऋजुपूरक (supplementary कोण १५०° असूं शकतो. याशिवाय हे दोन कोण ३६०° नी किंवा ३६०° च्या अपवर्त्यांनी वाढवून अथवा कमी करून येणाऱ्या कोणांपर्यंतहि अ चें मान असूं शकतें. म्हणून ३०°, १५०°, ३९०°, ५१०°,... −३३०°, −२१०°....इत्यादि कोणांची ज्या $\frac{१}{२}$ आहे.

इतर निष्पत्तींनाहि वरील विधान लागूं पडेल.

निरनिराळ्या निष्पत्तींच्या मानांच्या ज्या अनंत श्रेढी (infinite series) येतात त्यांना समाविष्ट करणाऱ्या कांही सामान्य (general) पदसंहती मिळतात काय हें आपण आता पाहूं.

६·२ समजा परिभ्रमणरेषा मय या आदिम स्थितींत आहे या स्थितींत येतांना तिचो घन वा ऋण दिशेनें ०,

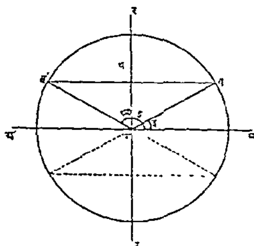
य′ म य

आ : १

किंवा १, किंवा २, किंवा ३, .. इत्यादि पूर्ण परिभ्रमणें झालीं असलीं पाहिजेत. तिनें मुळींच भ्रमण केलें नसेल तर तिनें रेखिलेला कोण शून्य असतो. तिनें घन दिशेनें एक परिभ्रमण पूर्ण केलें असल्यास रेखिलेला कोण २ प्या होतो. तेंच भ्रमण ऋण दिशेनें झालें असल्यास रेखिलेला कोण −२ प्या होतो. तिनें दोन परिभ्रमणें पूर्ण केलीं असल्यास प्रतिघटीवत् वा घटीवत् भ्रमण असेल त्याप्रमाणे रेखिलेला कोण ४ प्या किंवा −४ प्या इतका होतो. म्हणून परिभ्रमणरेषा मय या स्थितींत असते तेव्हां तिनें रेखिलेला कोण ०, किंवा ± २ प्या, किंवा ± ४ प्या, किंवा ± ६ प्या,.. असतो. स, शून्य किंवा कोणताहि घन वा ऋण पूर्णांक असल्यास हे सर्व कोण २सप्या या एकाच व्यंजकानें (expression) दर्शविता येतात.

मय′ या स्थितींत येण्याकरितां परिभ्रमण रेषेला प्रथम कांहीं पूर्ण परिभ्रमणें करून मय या स्थितींत यावें लागतें, आणि नंतर घन वा ऋण दिशेनें अर्धपरिभ्रमण करावें लागतें म्हणून परिभ्रमणरेषा जेव्हां मय′शीं संपाती होते तेव्हां तिनें रेखिलेला कोण २सप्या + प्या किंवा २सप्या − प्या म्हणजेच (२स ± १) प्या इतका असतो.

६·३ दिलेली ज्या असणारा अल्पिष्ट (least) धन कोण रचणें व एकच ज्या असणारे सर्व कोन समाविष्ट करणारी सामान्य पद्संहति काढणें.



आ. ६ १

समजा एखाद्या कोनाची ज्या 'क्ष' समान दिली आहे. यय व रर' या म बिंदूत छेदणाऱ्या आणि एकमेकांना लंब असणाऱ्या रेषा घ्या. म केन्द्र घेऊन १ ही त्रिज्या असलेलें वृत्त काढा. मर वर (किंवा क्ष ऋण असल्यास मर' वर) मप=क्ष मापा. प मधून य'पय ही सरळ रेषा य'मय ला समान्तर काढून वृत्तास य आणि य' या बिंदूंत छेदूं द्या.

कोन यमय इ ने दर्शवा.

आता, ज्या इ = ज्या मवप $= \frac{मप}{मव} = \frac{क्ष}{१} =$ क्ष.

∴ इ हा दिलेली ज्या असणारा आलिष्ठ कोण आहे.

क्ष ही ज्या असलेला ∠ यमव' = प्या − इ हा आणखीहि एक कोण आहे हें आकृतीवरून स्पष्टपणें दिसून येईल.

'क्ष'ची महत्ता व चिन्ह दिलें असल्यामुळे प चें र' मर वरील स्थान स्थिर आहे. म्हणून परिभ्रमणरेषा शून्यापासून २ प्या पर्यंत जात असतां दिलेलीज्या असणारे, इ व प्या − इ, हे दोनच कोण ती रेखाटते हें आकृतीवरून सहज दिसून येईल.

म्हणजे, परिभ्रमणरेषा जेव्हां मव वा मव' यांपैकी कोणत्यातरी एका स्थितींत असते, व दुसऱ्या कोणत्याहि स्थितींत नसते, तेव्हांच तिने रेखिलेल्या कोणाची ज्या दिलेल्या मानाइतकी (म्हणजे क्ष इतकी) असते (७६ अनुच्छेदहि पहा)

आता परिभ्रमणरेषेची स्थिति मव असते तेव्हां तिने कोणत्याहि पूर्ण संख्येइतकी परिभ्रमणें पूर्ण करून नंतर इ हा कोण रेखिलेला असतो. म्हणजे, मागील अनुच्छेदानुसार, घ शून्य किंवा धन या ऋण पूर्णांक असल्यास, तिने रेखिलेला कोण

२ घ प्या + इ.......... ....(१)

इतका असतो.

तसेंच परिभ्रमणरेषा मव' या स्थितींत असते तेव्हां तिने रेखिलेला कोण, (घ शून्य किंवा कोणताहि धन या ऋण पूर्णांक असल्यास),

२ध ध्या + (ध्या − इ) म्हणजेच (२ध + १)ध्या − इ...(२) इतका असतो.

आता स शून्य किंवा कोणताहि धन वा ऋण पूर्णांक असल्यास, वरील कोणांचे दोन्ही संच,

स ध्या + $(-१)^{स}$ इ .... (३)

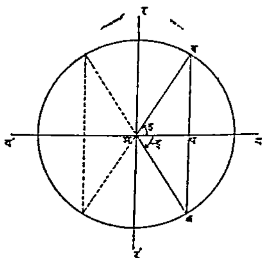
या पदसंहतींत समाविष्ट होतात.

कारण, $(-१)^{२ध} = +१$, म्हणून स २ध समान असतो तेव्हां (३) चें रुपांतर २धध्या + इ अर्थात् पदसंहति (१) मधे होते.

आणि $(-१)^{२ध+१} = -१$, म्हणून स २ध + १ समान असतो तेव्हां (३) चें रुपांतर (२ध + १) ध्या − इ अर्थात् पदसंहति (२) मधे होते.

उपसाध्यः— एकच ज्या असणाऱ्या सर्व कोणांची व्युत्क्रमज्याहि एकच असते, म्हणून पदसंहति (३) मधे इ च्या व्युत्क्रमज्येइतकी व्युत्क्रमज्या असणार सर्व कोण समाविष्ट होतात.

६·४ दिलेली कोटिज्या असणारा अल्पिष्ठ धन कोण रचणें व एकच कोटिज्या असणाऱ्या सर्व कोणांकरितां सामान्य पदसंहति काढणें.



आ ६.३

समजा दिलेली कोटिज्या 'क्ष' आहे.

म मधे छेदणाऱ्या य'मय आणि र'मर या दोन लंब रेषा घ्या.

मय वर (किंवा 'क्ष' ऋण असल्यास मय' वर) मप = क्ष मापा. प तून य'पय, र'मर ला समांतर काढा आणि तिला, म हे केन्द्र व १ ही त्रिज्या असलेल्या वृत्तास, य आणि य' मधे छेदू द्या.

कोण यमय ई ने दर्शवा.

पहिल्या चरणांत इ आणि −इ हेच कोण केवळ असे आहेत की ज्यांची कोटिज्या दिलेल्या कोटिज्येइतकी (म्हणजे 'क्ष') आहे हें आकृतीवरून दिसून येईल.

म्हणून, परिभ्रमणरेषा मव वा मव' या स्थितींत असते व दुसऱ्या कोणत्याहि स्थितींत नसते, तेव्हांच तिने रेखिलेल्या कोणाची कोटिज्या दिलेल्या कोटिज्येइतकी असते.

(५.२ अनुच्छेदहि पहा.)

परिभ्रमणरेषा मव या स्थितींत असते तेव्हां तिने कोणत्याहि पूर्ण संख्येइतकी परिभ्रमणें पूर्ण करून नंतर इ हा कोण रेखिलेला असतो; म्हणजे, स शून्य किंवा कोणताहि धन वा ऋण पूर्णांक असल्यास, तिने रेखिलेला कोण

२स प्या + इ

इतका असतो.

परिभ्रमणरेषा मव' या स्थितींत असते तेव्हां तिने कोणत्याहि पूर्ण संख्येइतकी परिभ्रमणें पूर्ण करून नंतर −इ कोण रेखिलेला असतो, म्हणजे तिने

२सप्या − इ

हा कोण रेखिलेला असतो.

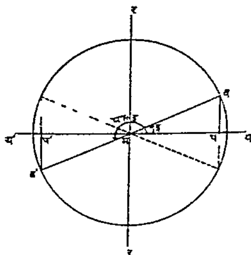
स शून्य किंवा कोणताहि धन वा ऋण पूर्णांक असेल तर हे सर्व कोण

२सप्या ± इ..................(१)

या पदसंहतींत समाविष्ट होतात.

उपसाध्यः— ज्या कोणांची व्युत्क्रमकोटिज्या इ च्या व्युत्क्रमकोटिज्येइतकी आहे असे सर्व कोण पदसंहति (१) मध्ये समाविष्ट होतात.

६.५ दिलेली स्पर्शज्या असणारा लघिष्ठ धन कोण रचणें व एकच स्पर्शज्या असणाऱ्या सर्व कोणांकरिता सामान्य पदसंहति काढणें.



आ. ९.४

समजा 'क्ष' हें दिलेल्या स्पर्शरेषेचें मान आहे. य'मय आणि र'मर या म मध्ये छेदणाऱ्या आणि एकमेकांना लंब असणाऱ्या रेषा घ्या मय वर मप=१ मापा व नंतर तिला पव हा लंब काढून पव=क्ष घ्या मग वमप (=ह, समजा) हा इष्ट कोण होय

म हें केंद्र व मव ही त्रिज्या घेऊन वृत्त काढा वम वाढवून तिला वृत्तास व' मध्ये मिळूं द्या मय' वर व'प' लंब

काढा. मग $\angle$यमव' = प्या + इ या कोणाचीहि स्पर्शज्या तितकीच म्हणजे 'क्ष' आहे.

परिभ्रमणरेषा जेव्हां मव किंवा मव' या स्थितींत असते, व दुसऱ्या कोणत्याहि स्थितींत नसते तेव्हांच रेखिलेल्या कोणाची स्पर्शज्या दिलेल्या स्पर्शज्येइतकी असते.

(५·७ अनुच्छेदहि पहा.)

ती मव शीं संपाती होते तेव्हां, घ शून्य किंवा कोणताहि धन या ऋण पूर्णांक असल्यास, तिने रेखिलेला कोण २घ प्या + इ असतो.

ती मव' च्या स्थितींत असते तेव्हां तिने रेखिलेला कोण २ घ प्या + (प्या + इ) म्हणजे (२ घ + १) प्या + इ असतो.

स शून्य किंवा कोणताहि धन वा ऋण पूर्णांक असल्यास वरील कोणांचे दोन्ही संच

स प्या + इ ....(१)

या पदसंहतींत समाविष्ट होतात.

उपसाध्यः—ज्या कोणांची कोटिस्पर्शज्या इ च्या कोटिस्पर्शज्येइतकी आहे अशा सर्व कोणांचा समावेश पदसंहति (१) मधे होतो.

६·६ निदर्शनात्मक (illustrative) उदाहरणें.

उदाहरण १. (१) ज्यांची ज्या $\frac{१}{\surd २}$ समान आहे,

(२) ज्यांची कोटिज्या $-\frac{\surd ३}{२}$ समान आहे,

(३) ज्यांची स्पर्शज्या $\surd ३$ समान आहे,

अशा सर्व कोणांच्या सामान्य पदसंहती लिहा.

(१) $\frac{१}{\sqrt{२}}$ समान ज्या असणारा अलिप्त कोण ४५°

म्हणजेच $\frac{\text{प्या}}{४}$ आहे.

म्हणून ६·३ या अनुच्छेदानुसार, ज्या कोणाची ज्या $\frac{१}{\sqrt{२}}$ आहे अशा सर्व कोणांची सामान्य पदसहति

$$\text{स प्या} + (-१)^{\text{स}} \frac{\text{प्या}}{४}$$

आहे.

(२) $-\frac{\sqrt{३}}{२}$ ही कोटिज्या असणारा अलिप्त घन कोण १५०° म्हणजेच $\frac{५\text{प्या}}{६}$ आहे.

म्हणून ६·४ या अनुच्छेदानुसार, $-\frac{\sqrt{३}}{२}$ ही कोटिज्या असणाऱ्या सर्व कोणांची सामान्य पदसंहति

$$२\,\text{स प्या} \pm \frac{५\,\text{प्या}}{६}$$

आहे

(३) $\sqrt{3}$ ही स्पर्शज्या असणारा अलिष्ठ धन कोण ६०° म्हणजेच $\frac{\text{प्या}}{3}$ आहे. म्हणून ६.५ या अनुच्छेदानुसार, $\sqrt{3}$ ही स्पर्शज्या असलेल्या सर्व कोणांची सामान्य पदसहति,

$$\text{स प्या} + \frac{\text{प्या}}{3}$$

आहे.

उदाहरण २ ज्या^{2} अ $= \frac{1}{2}$ हा समीकार सोडवा व अ ची सामान्यतम (most general) गर्हा काढा.

$$\text{ज्या}^2\text{अ} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \text{ज्या अ} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

वरचें चिन्ह घेतल्यास,

$$\text{ज्या अ} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{ज्या } \frac{\text{प्या}}{4}$$

$$\text{अ} = \text{स प्या} + (-1)^{\text{स}} \frac{\text{प्या}}{4}$$

खालचें चिन्ह घेतल्यास,

$$\text{ज्या अ} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \text{ज्या}\left(-\frac{\text{प्या}}{4}\right)$$

$$\therefore \quad अ = स\,\pi + (-1)^{स}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

ही दोन्ही फलें (solutions) एकत्र करून,

$$अ = स\,\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

उदाहरण ३. कोज्या $अ = \frac{1}{2}$ व स्पअ $= -\frac{1}{\sqrt{3}}$ या दोन्ही समीकारांचें समाधान करणारी अ ची सामान्यतम अर्हा काढा.

0° व 360° मधें असणाऱ्या व कोज्या $अ = \frac{1}{2}$ चें समाधान करणाऱ्या अ च्या अर्हा 30° व 330° या आहेत.

तसेंच, स्प $अ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ चें समाधान करणाऱ्या अ च्या 0° व 360° मधील अर्हा 150° व 330° या आहेत.

म्हणून 0° व 360° मधें असणारी व दोन्ही समीकारांचें समाधान करणारी अ ची अर्हा केवळ 330° म्हणजेच $\frac{11\pi}{6}$ आहे.

या कोणाचा चार लम्बकोणांच्या कोणत्याहि अपवर्त्याशीं योग केल्यास सामान्यतम अर्हा मिळेल.

म्हणून $2\,स\,\pi + \frac{11\pi}{6}$ हीच इष्ट अर्हा होय.

उदाहरणसंग्रह ७

खालील समीकारांचें समाधान करणाऱ्या अ च्या सामान्यतम अर्हा काढा.

(१) $\text{ज्या अ} = \frac{\sqrt{३}}{२}$ (२) $\text{कोज्या अ} = ०$

(३) $\text{कोस्प अ} = -१$ (४) $\text{व्युत्कोज्या}^{२}\text{अ} = ४$

(५) $\text{स्प}^{२}\text{अ} = १$ (६) $४\ \text{व्युत्कोज्या}^{२}\ \text{अ} - ७\text{स्प}^{२}\text{अ} = ३$

(७) स कोणताहि पूर्णांक असल्यास,

$$(२\text{स} - १)\frac{\text{प्या}}{२} + (-१)^{\text{स}}\frac{\text{प्या}}{४} \text{ व } २\text{स प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{४}$$

ही दोन्ही सूत्रें एकच कोण दर्शवितात हें सिद्ध करा.

(८) $\text{स प्या} + (-१)^{\text{स}}\ (\text{प्या} - \text{इ})$ व

$\left(२\text{स प्या} \pm ३\frac{\text{प्या}}{२} - \frac{\text{प्या}}{२}\right) \pm \text{इ}$ ही दोन्ही सूत्रें एकच कोण दर्शवितात हें सिद्ध करा.

(९) $\text{कोस्प अ} = १$ व $\text{ज्या अ} = \frac{१}{\sqrt{२}}$ या दोन्ही समीकारांचें समाधान करणारी अ ची सामान्यतम अर्हा काढा.

(१०) $\text{स्पगअ कोस्पनअ} + \text{स्प}\frac{\text{प्या}}{४}\ \text{कोस्प}\ \frac{३\text{प्या}}{४} = ०$

चे समाधान करणाऱ्या अ च्या अहां एक समान्तर श्रेढी निर्माण करतात हें सिद्ध करा आणि तिचा प्रचय (common difference) काढा

६७ ज्या समीकारात एक किंवा अनेक अज्ञात कोणाच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती असतात त्या समीकाराला त्रिकोणमितीय समीकार म्हणतात

काही सोपे त्रिकोणमितीय समीकार खाली सोडविले आहेत

उदाहरण १ २ कोज्या^{2}अ + $\sqrt{2}$ ज्या अ = २ हा समीकार सोडवा [कलकत्ता १९०२]

दिलेला समीकार पुढीलप्रमाणेंहि लिहिता येतो

२ (१ − ज्या^{2}अ) + $\sqrt{2}$ ज्या अ = २

किंवा २ − २ज्या^{2}अ + $\sqrt{2}$ ज्या अ = २

$\sqrt{2}$ ज्या अ (१ − $\sqrt{2}$ ज्या अ) = ०

म्हणून, एकतर ज्या अ ० (१)

किंवा १ − $\sqrt{2}$ ज्या अ = ० (२)

(१)वरून,

ज्या अ = ० = ज्या ०

अ = स प्या ही एक सामान्य अहां आहे

(२)वरून,

ज्या अ = $\frac{१}{\sqrt{२}}$ = ज्या $\frac{प्या}{४}$

$\therefore$ अ = स प्या $+(-१)^{स}$ $\frac{\text{प्या}}{४}$ ही दुसरी सामान्य अर्हा आहे.

उदाहरण २. स्प अ = कोस्प त अ हा समीकार सोडवा.

स्प अ = कोस्प त अ

$$= \text{स्प}\left(\frac{\text{प्या}}{२} - \text{त अ}\right)$$

म्हणून, स शून्य किंवा कोणताहि धन वा ऋण पूर्णांक असल्यास,

$$\text{अ} = \text{स प्या} + \left(\frac{\text{प्या}}{२} - \text{त अ}\right)$$

$$\text{किंवा, अ} = \left(\text{स} + \frac{१}{२}\right)\frac{\text{प्या}}{(\text{त}+१)}$$

उदाहरणसंग्रह ८

पुढील समीकार सोडवा :—

(१) $\text{ज्या}^{२}\text{अ} + \frac{\sqrt{२}-१}{२}\,\text{कोज्या अ} + \frac{१}{\sqrt{२}}\left(\frac{१}{२} - \sqrt{२}\right) = ०$

(२) $\text{व्युज्या}^{२}\text{अ} + \text{कोस्प}^{२}\text{अ} = ३\,\text{कोस्प अ}$

(कलकत्ता १९०८)

(३) $२ स्प^२ य = ७ - ३$ व्युत्कोज्या य (नागपूर १९३९)

(४) $\sqrt{३}$ − ज्या अ कोज्या अ = $\sqrt{३}$ ज्या^{२}अ

(५) ज्या ७ अ = ज्या ३ अ

(६) कोज्या ५ अ = ज्या अ

(७) कोस्प अ = कोस्प $\frac{१}{अ}$

(८) स्प (इ + ई) = $-\frac{१}{\sqrt{३}}$ व कोस्प (इ − ई) = $\sqrt{३}$

(९) कोज्या (३य + ५र) = $\frac{१}{\sqrt{२}}$ व

कोज्या (५य + ३र) = $\frac{१}{२}$

(१०) क कोज्या अ + ख ज्या अ = ग हा समीकार सोडवा व जर $क^२ + ख^२ = ग^२$ असेल तर अ च्या दोन अर्हा समान होतात हें दाखवा. (कलकत्ता १८८२)

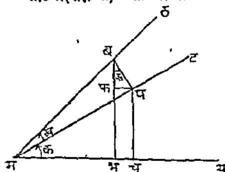
प्रकरण सातवें

योग आणि वियोग प्रमेयें. गुणनसूत्रें.

७.१ योग प्रमेयें (addition theorems).

ज्या(क + ख) = ज्या क कोज्या ख + कोज्या क ज्या ख

कोज्या(क + ख) = कोज्या क कोज्या ख − ज्या क ज्या ख



आ ७·१

मय पासून निघालेली परिभ्रमणरेषा क समान यमट हा कोण करून नंतर ख समान टमठ हा कोण रेखिते.

∴ ∠यमठ = ∠यमट + ∠टमठ

= क + ख

मठ या मर्यादारेषेवर (bounding line) ब हा एक बिंदु घ्या आणि मय व मट वर अनुक्रमे बभ व बप हे लम्ब

काढा. प पासून मय व यभ वर अनुक्रमे पच व पफ हे लम्ब काढा.

$\angle$मभव व $\angle$मपव लम्बकोण असल्यामुळे म, भ, प, व हे बिंदू संवृत्तीय (concyclic) आहेत.

आता पवभ आणि पमभ हे कोण एकाच खंडात (segment) असल्यामुळे,

$\angle$पवभ = $\angle$पमभ = क

अर्थात् $\angle$पवफ = क

आता, ज्या (क + ख) = ज्या यमठ

$$= \frac{\text{भव}}{\text{मव}} = \frac{\text{भफ} + \text{फव}}{\text{मव}}$$

पफभच आयत (rectangle) आहे;

म्हणून भफ = चप

$$\therefore \text{ज्या (क + ख)} = \frac{\text{चप}}{\text{मव}} + \frac{\text{फव}}{\text{मव}}$$

$$= \frac{\text{चप}}{\text{मप}} \cdot \frac{\text{मप}}{\text{मव}} + \frac{\text{फव}}{\text{पव}} \cdot \frac{\text{पव}}{\text{मव}}$$

आकृतीवरून क आणि ख कोणांच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्तींचा आणि $\angle$पवफ = क याचा उपयोग करून,

ज्या (क + ख) = ज्या क कोज्या ख + कोज्या क ज्या ख

पुन्हा कोज्या (क + ख) $= \frac{\text{मभ}}{\text{मव}}$

$$= \frac{\text{मच} - \text{भच}}{\text{मव}}$$

पफभच आयत असल्यामुळें भच = फप

$$\therefore \text{ कोज्या } (\text{क}+\text{ख}) = \frac{\text{मच}}{\text{मव}} - \frac{\text{फप}}{\text{मव}}$$

$$= \frac{\text{मच}}{\text{मप}} \cdot \frac{\text{मप}}{\text{मव}} - \frac{\text{फप}}{\text{पव}} \cdot \frac{\text{पव}}{\text{मव}}$$

क आणि ख कोणांच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती आणि ∠पवफ = क याचा उपयोग करून,

कोज्या (क + ख) = कोज्या क कोज्या ख − ज्या क ज्या ख

७·११ मागील अनुच्छेदाच्या आकृतींत क आणि ख हे दोन्ही कोण धन आणि न्यून काढले आहेत. परंतु या कोणांचें परिमाण कांहीहि असलें तरी वर दिलेल्या सिद्धतेतील राशींच्या चिन्हांकडे योग्य लक्ष दिल्यास तीच सिद्धता सर्व प्रकारांत लागूं पडेल.

वरील प्रमेयें कोणांचें परिमाण कांहीहि असलें तरी सत्य आहेत हें पुढें दिल्याप्रमाणेंहि दाखविता येतें.

प्रथम क व ख हे दोन्ही कोण न्यून आहेत असें समजा. म्हणजे वरील प्रमेयें सत्य राहतील.

आता $\text{क}_1 = ९०^\circ + \text{क}$

व $\text{ख}_1 = \text{ख}$ घ्या.

$\text{ज्या } (\text{क}_1 + \text{ख}_1) = \text{ज्या}(९०^\circ + \overline{\text{क}+\text{ख}}) = \text{कोज्या}(\text{क}+\text{ख})$

= कोज्या क कोज्या ख − ज्या क ज्या ख
(७·१ अनुच्छेदानें)

परंतु ज्या (९०° + क) = कोज्या क

आणि कोज्या (९०° + क) = − ज्या क

∴ ज्या (क$_1$ + ख$_1$) = ज्या (९०° + क) कोज्या ख
+ कोज्या (९०° + क) ज्या ख

= ज्या क$_1$ कोज्या ख$_1$ + कोज्या क$_1$ ज्या ख$_1$
.........(१)

तसेंच,

कोज्या (क$_1$ + ख$_1$) = कोज्या (९०° + $\overline{\text{क} + \text{ख}}$)

= − ज्या (क + ख)

= − ज्या क कोज्या ख
− कोज्या क ज्या ख
(७·१ अनुच्छेदानें)

= कोज्या (९०° + क) कोज्या ख
− ज्या (९०° + क) ज्या ख

= कोज्या क$_1$ कोज्याख$_1$
− ज्याक$_1$ ज्या ख$_1$
.........(२)

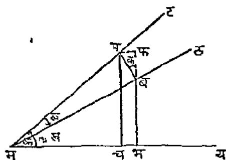
ख$_1$, ख समान असण्याऐवजी, ९०° + ख समान असला तरी वर दिल्याप्रमाणेंच रीत लागूं पडेल.

(१) व (२) या संबंधांवरून असें दिसून येईल की क आणि ख कोण ९०° नें वाढविलें तरी योगप्रमेयें सत्य राहतात.

त्याचप्रमाणें क$_2$ = ९०° + क$_1$ घेऊन, क आणि ख कोण ०° आणि २७०° मधें असल्यास योग प्रमेयांची सत्यता दाखवितां येईल.

अशाच रीतीचा अवलंब केला असतां वरील योगप्रमेयें, कोणांच्या कितीहि महत्ता असल्या तरी सत्य राहतात हें दिसून येईल.

७२ वियोग प्रमेयें (subtraction theorems).
ज्या (क – ख) = ज्या क कोज्या ख – कोज्या क ज्या ख
कोज्या (क – ख) = कोज्या क कोज्या ख + ज्या क ज्या ख



आ ७२

परिभ्रमणरेषा मय पासून निघून क समान यमट हा कोण रेखिते आणि नंतर ख कोणाइतकें घटीवत् भ्रमण करून मठ या स्थितींत येते.

तेव्हां ∠यमठ = ∠यमट – ∠टमठ
= क – ख

मठ या मर्यादारेषेवर ब हा एक बिंदु घेऊन मय व मट वर अनुक्रमें बभ व बप हे लम्ब काढा. प बिंदूतून मय ला पच लम्ब काढा व भब वाढवून तिला पफ हा लम्ब काढा.

आता $\angle$ मभर + $\angle$ मपव = १८०°

$\because$ भमरप हा चक्रिक (cyclic) चौकोन आहे.

$$\therefore \angle \text{परफ} = \angle \text{भमप} = \text{क}$$

आता ज्या (क − ख) = $\frac{\text{भर}}{\text{मर}} = \frac{\text{भफ} - \text{वफ}}{\text{मर}}$

पफभच आयत आहे. म्हणून भफ = चप

$\therefore$ ज्या (क − ख) = $\frac{\text{चप}}{\text{मर}} - \frac{\text{वफ}}{\text{मर}}$

$$= \frac{\text{चप}}{\text{मप}} \cdot \frac{\text{मप}}{\text{मर}} - \frac{\text{वफ}}{\text{वप}} \cdot \frac{\text{वप}}{\text{मर}}$$

आकृतीवरून क आणि ख कोनांच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती आणि $\angle$ परफ = क याचा उपयोग करून,

ज्या (क − ख) = ज्या क कोज्या ख − कोज्या क ज्याख

पुन्हा कोज्या(क − ख) = $\frac{\text{मभ}}{\text{मर}}$

$$= \frac{\text{मच} + \text{चभ}}{\text{मर}}$$

पफभच आयत असल्यामुळे चभ = पफ

$$\text{कोज्या (क − ख)} = \frac{\text{मच}}{\text{मव}} + \frac{\text{पफ}}{\text{मव}}$$

$$= \frac{\text{मच}}{\text{मव}} \cdot \frac{\text{मप}}{\text{मव}} + \frac{\text{पफ}}{\text{पव}} \cdot \frac{\text{पव}}{\text{मव}}$$

आकृतीवरून क आणि ख कोणांच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती आणि ∠ पत्रफ = क यांचा उपयोग करून,

कोज्या (क − ख) = कोज्या क कोज्या ख + ज्या क ज्या ख

अभ्यास :— ७·११ अनुच्छेदांत दर्शविल्याप्रमाणे वरील सिद्धता, कोणांची महत्ता कांहीहि असली तरी लागू पडते हें सिद्ध करा.

७·३ (१) $\text{स्प} (\text{क}+\text{ख}) = \dfrac{\text{स्प क} + \text{स्प ख}}{१ - \text{स्प क स्प ख}}$

आणि (२) $\text{स्प} (\text{क}-\text{ख}) = \dfrac{\text{स्प क} - \text{स्प ख}}{१ + \text{स्प क स्प ख}}$

हें सिद्ध करणें.

$$\text{स्प} (\text{क}+\text{ख}) = \frac{\text{ज्या} (\text{क}+\text{ख})}{\text{कोज्या} (\text{क}+\text{ख})}$$

$$= \frac{\text{ज्या क कोज्या ख} + \text{कोज्या क ज्या ख}}{\text{कोज्या क कोज्या ख} - \text{ज्या क ज्या ख}}$$

आता, अंश व हर यांना कोज्या क कोज्या ख ने भागून,

$$\text{स्प} (\text{क}+\text{ख}) = \frac{\dfrac{\text{ज्याक}}{\text{कोज्याक}} + \dfrac{\text{ज्या ख}}{\text{कोज्या ख}}}{१ - \dfrac{\text{ज्याक}}{\text{कोज्या क}} \times \dfrac{\text{ज्या ख}}{\text{कोज्या ख}}}$$

म्हणून $\text{स्प} (\text{क}+\text{ख}) = \dfrac{\text{स्प क} + \text{स्प ख}}{१ - \text{स्पक स्प ख}}$

पुन्हा $\text{स्प} (\text{क}-\text{ख}) = \dfrac{\text{ज्या} (\text{क}-\text{ख})}{\text{कोज्या} (\text{क}-\text{ख})}$

$$= \frac{१ + \frac{१}{\sqrt{३}}}{१ - \frac{१}{\sqrt{३}}}$$

$$= \frac{\sqrt{३} + १}{\sqrt{३} - १}$$

$$= २ + \sqrt{३}$$

आता, ७५° व १५° हे लंबपूरक कोण आहेत म्हणून १५° च्या निष्पत्ति ७५° च्या निष्पत्तींवरून लिहिता येतात.

$$\text{ज्या } १५° = \frac{\sqrt{३} - १}{२\sqrt{२}}$$

$$\text{कोज्या } १५° = \text{ज्या } ७५° = \frac{\sqrt{३} + १}{२\sqrt{२}}$$

$$\text{स्प } १५° = \text{कोस्प} ७५° = २ - \sqrt{३}$$

वियोगप्रमेयांचा (४५°–३०°) करिता उपयोग करूनहि १५° च्या निष्पत्ती काढतां येतात

उदाहरण २. योगप्रमेयें गृहीत धरून वियोगप्रमेयें काढा.

$$\text{ज्या } (\text{क} + \text{ख}) = \text{ज्या क कोज्या ख} + \text{कोज्या क ज्या ख}$$

$$\text{कोज्या } (\text{क} + \text{ख}) = \text{कोज्या क कोज्या ख} - \text{ज्या क ज्या ख}$$

$$\text{आणि स्प } (\text{क} + \text{ख}) = \frac{\text{स्प क} + \text{स्प ख}}{१ - \text{स्प क स्प ख}}$$

यांपैकी प्रत्येकांत ख च्या जागीं –ख लिहा.

ज्या (क − ख) = ज्या क कोज्या (−ख)
+ कोज्या क ज्या (−ख)
= ज्या क कोज्या ख
− कोज्या क ज्या ख
(५·२ अनुच्छेदाने)

तसेंच, कोज्या (क − ख) = कोज्या क कोज्या(−ख)
− ज्या क ज्या (−ख)
= कोज्या क कोज्या ख + ज्या क ज्या ख

आणि स्प (क − ख) = $\frac{\text{स्प क + स्प (−ख)}}{\text{१ − स्प क स्प(−ख)}}$
= $\frac{\text{स्प क − स्प ख}}{\text{१ + स्प क स्प ख}}$

याच रीतीनें आपणांस वियोगप्रमेयांवरून योगप्रमेयें काढतां येतील.

उदाहरण ३. योग व वियोग प्रमेयांचा उपयोग करून ५ व्या प्रकरणांतील कोणताहि संबंध काढतां येतो.

उदाहरणार्थ, ज्या (−अ) = ज्या (० − अ)
= ज्या० कोज्या अ − कोज्या ० ज्या अ
(७·२ अनुच्छेदानें)
= ० कोज्या अ − १. ज्या अ
= − ज्या अ

ज्या (९०° + अ) = ज्या९०° कोज्या अ + कोज्या९०° ज्या अ
(७·१ अनुच्छेदानें)
= १. कोज्या अ + ०. ज्या अ
= कोज्या अ

$$\text{स्प}\,(\text{प्या} - \text{अ}) = \frac{\text{स्प प्या} - \text{स्प अ}}{१ + \text{स्प प्या स्प अ}}$$

(७.३ अनुच्छेदाने)

$$= \frac{० - \text{स्प अ}}{१ + ०.\text{स्प अ}}$$

$$= -\text{स्प अ}$$

$$\text{कोज्या}\,(\text{प्या} + \text{अ}) = \text{कोज्या प्या कोज्या अ} - \text{ज्या प्या ज्या अ}$$

(७.१ अनुच्छेदाने)

$$= -१.\text{कोज्या अ} - ०.\text{ज्या अ}$$

$$= -\text{कोज्या अ}$$

उदाहरण ४. सिद्ध करा:—

$$\text{कोज्या}\,(\text{क}+\text{ख})\,\text{कोज्या}\,(\text{क}-\text{ख}) = \text{कोज्या}^{२}\text{क} - \text{ज्या}^{२}\text{ख}$$

आणि

$$\text{ज्या}\,(\text{क}+\text{ख})\,\text{ज्या}\,(\text{क}-\text{ख}) = \text{कोज्या}^{२}\text{क} - \text{कोज्या}^{२}\text{ख}$$

७.१ व ७.२ या अनुच्छेदांवरून,

$$\text{कोज्या}\,(\text{क}+\text{ख})\,\text{कोज्या}\,(\text{क}-\text{ख})$$

$$= (\text{कोज्या क कोज्या ख} - \text{ज्या क ज्या ख}) \times (\text{कोज्या क कोज्या ख} + \text{ज्या क ज्या ख})$$

$$= \text{कोज्या}^{२}\text{क कोज्या}^{२}\text{ख} - \text{ज्या}^{२}\text{क ज्या}^{२}\text{ख}$$

$$= \text{कोज्या}^{२}\text{क}\,(१ - \text{ज्या}^{२}\text{ख}) - (१ - \text{कोज्या}^{२}\text{क})\,\text{ज्या}^{२}\text{ख}$$

$$= \text{कोज्या}^{२}\text{क} - \text{ज्या}^{२}\text{ख}$$

त्याच अनुच्छेदांवरून,

ज्या (क + ख) ज्या (क − ख)

$$= (\text{ज्या क कोज्या ख} + \text{कोज्या क ज्या ख}) \times (\text{ज्या क कोज्या ख} - \text{कोज्या क ज्या ख})$$

$$= \text{ज्या}^2\text{क कोज्या}^2\text{ ख} - \text{कोज्या}^2\text{क ज्या}^2\text{ ख}$$

$$= (१ - \text{कोज्या}^2\text{ क})\ \text{कोज्या}^2\text{ ख} - \text{कोज्या}^2\text{क}\ (१ - \text{कोज्या}^2\text{ ख})$$

$$= \text{कोज्या}^2\text{ ख} - \text{कोज्या}^2\text{ क}$$

उदाहरण ५. सिद्ध करा:—

$$\frac{\text{कोज्या } ९^\circ + \text{ज्या } ९^\circ}{\text{कोज्या } ९^\circ - \text{ज्या } ९^\circ} = \text{स्प } ५४^\circ$$

$$\text{स्प } ५४^\circ = \text{स्प } (४५^\circ + ९^\circ)$$

$$= \frac{\text{स्प } ४५^\circ + \text{स्प } ९^\circ}{१ - \text{स्प } ४५^\circ \text{ स्प} ९^\circ} \quad (\text{७.३ अनुच्छेदाने})$$

$$= \frac{१ + \text{स्प } ९^\circ}{१ - \text{स्प } ९^\circ}$$

$$= \frac{१ + \frac{\text{ज्या } ९^\circ}{\text{कोज्या } ९^\circ}}{१ - \frac{\text{ज्या } ९^\circ}{\text{कोज्या } ९^\circ}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या } ९^\circ + \text{ज्या } ९^\circ}{\text{कोज्या } ९^\circ - \text{ज्या } ९^\circ}$$

उदाहरणसंग्रह ९

(१) जर ज्या इ $= \frac{५}{१३}$ व कोज्या ई $= \frac{४}{५}$ असतील तर ज्या (इ + ई), कोज्या (इ − ई) व स्प(इ − ई) यांची मानें काढा.

(२) जर स्प उ $= \frac{६}{७}$ व स्प ऊ $= \frac{१}{१३}$ असतील तर उ + ऊ $= \frac{\text{π}}{४}$ हें सिद्ध करा

(३) जर स्प क $= \frac{१}{४}$ आणि स्प ख $= \frac{३}{५}$ असतील तर (क + ख) काढा.

सिद्ध करा :—

(४) [ज्या (६०° − अ) कोज्या (३०° − आ) + कोज्या(६०° − अ) ज्या(३०° − आ)] = कोज्या (अ + आ)

(५) [कोज्या (८०° + अ) कोज्या (८०° − अ) + ज्या(८०° + अ)ज्या(८०° − अ)] = कोज्या २ अ

(६) कोज्या ७५° + ज्या १०५° = ज्या ७५° − कोज्या १०५°

(७) $\frac{\text{ज्या (क − ख)}}{\text{ज्या क ज्या ख}} + \frac{\text{ज्या (ख − ग)}}{\text{ज्या ख ज्या ग}} + \frac{\text{ज्या (ग − क)}}{\text{ज्या ग ज्या क}} = ०$

(८) $\left\{ \text{ज्या}(\text{अ}+\text{आ})\text{कोज्या इ} - \text{कोज्या}(\text{आ}+\text{इ})\,\text{ज्या अ} \right\}$
$= \text{ज्या आ कोज्या } (\text{इ} - \text{अ})$

(९) $\text{कोस्प क} - \text{कोस्प २ क} = \text{व्युज्ज्या २ क}$
[कलकत्ता १८७०

(१०) $१ + \text{स्प अ स्प२अ} - \text{व्युत्कोज्या २अ} = ०$
[कलकत्ता १८५७

(११) $\dfrac{१+\text{स्प क कोस्प ख}}{\text{कोस्प ख} - \text{स्प क}} = \text{स्प } (\text{क}+\text{ख})$

(१२) $\text{स्प}\dfrac{\text{प्या}}{४} + \text{स्प}\dfrac{\text{प्या}}{६}\,\text{स्प}\dfrac{\text{प्या}}{१२} = \sqrt{१+\text{स्प}^{२}\dfrac{\text{प्या}}{६}}$

(१३) $\text{स्प}\left(\dfrac{\text{प्या}}{४}+\text{अ}\right)\text{स्प}\left(\dfrac{\text{प्या}}{४}-\text{अ}\right)$
$+\text{कोस्प}\left(\dfrac{\text{प्या}}{४}+\text{अ}\right)\text{कोस्प}\left(\dfrac{३\text{प्या}}{४}+\text{अ}\right)$
$= ०$

(१४) $\text{स्प } ५०^\circ + \text{स्प}१०^\circ + \sqrt{३}\,\text{स्प } ५०^\circ\,\text{स्प}१०^\circ = \sqrt{३}$

(१५) $\text{स्प } (४५^\circ + \text{क})\,\text{स्प } (४५^\circ - \text{क}) = १$

(१६) जर $\text{स्प ग} = \dfrac{\text{स ज्या क कोज्या क}}{१ - \text{स ज्या}^{२}\text{क}}$ असेल तर
$\text{स्प } (\text{क} - \text{ग}) = (१ - \text{स})\,\text{स्प क}$ हें दाखवा.
[पाटणा १९४१

(१७) क च्या सर्व मानांकरिता,

$$\frac{\text{कोस्प क}}{१+\text{कोस्प क}} \cdot \frac{\text{कोस्प } (४५^\circ - \text{क})}{१+\text{कोस्प } (४५^\circ - \text{क})} \text{ चें मान एकच}$$

राहते हें दाखवा. [पाटणा १९४२

(१८) क कोनाचे असे दोन भाग केले की त्या भागांच्या स्पर्शज्यांची निष्पत्ति न, आणि त्या भागांमधील फरक य आहे. तर

$$\text{ज्या य} = \frac{\text{न} - १}{\text{न} + १} \text{ ज्या क}$$

हें दाखवा. [अलाहाबाद १९४५

७·६ गुणनफलांचें (products) योग किंवा वियोग फलांत रूपांतर.

७·१ व ७·२ या अनुच्छेदांवरून,

$$\text{ज्या (क + ख)} = \text{ज्या क कोज्या ख} + \text{कोज्या क ज्या ख} \quad \dots (\text{अ})$$

$$\text{ज्या (क − ख)} = \text{ज्या क कोज्या ख} - \text{कोज्या क ज्या ख} \quad \dots (\text{आ})$$

$$\text{कोज्या (क + ख)} = \text{कोज्या क कोज्या ख} - \text{ज्या क ज्या ख} \quad \dots (\text{इ})$$

$$\text{कोज्या (क − ख)} = \text{कोज्या क कोज्या ख} + \text{ज्या क ज्या ख} \quad \dots (\text{ई})$$

(अ) आणि (आ) यांचा योग करून,

ज्या (क + ख) + ज्या (क − ख)

= २ज्या क कोज्या ख ... (१)

(अ) तून (आ) चा वियोग करून,

ज्या (क + ख) − ज्या (क − ख)

= २कोज्या क ज्या ख ... (२)

(इ) व (ई) चा योग करून,

कोज्या (क + ख) + कोज्या (क − ख)

= २कोज्या क कोज्या ख...(३)

(ई) तून (इ) चा वियोग करून,

कोज्या (क − ख) − कोज्या (क + ख)

= २ज्या क ज्या ख ... (४)

वरील चार सूत्रें आपण पुन्हा खालीलप्रमाणे लिहूं.

२ज्या क कोज्या ख = ज्या (क + ख)

+ ज्या (क − ख) ... (५)

२कोज्या क ज्या ख = ज्या (क + ख)

− ज्या (क − ख) ... (६)

२कोज्या क कोज्या ख = कोज्या (क + ख)

+ कोज्या (क − ख) ... (७)

२ज्या क ज्या ख = कोज्या (क − ख)

− कोज्या (क + ख) . (८)

(५) ते (८) हीं चार सूत्रें दोन कोणांच्या ज्या आणि कोटिज्या यांच्या गुणनफलाचें, त्या कोणांच्या दोन ज्यांच्या किंवा दोन कोटिज्यांच्या योगांत वा वियोगांत रूपांतर करतात.

७·७ योग अथवा वियोग फलांचें गुणनफलांत रूपांतर.

समजा $क + ख = ग$ व $क - ख = घ$

तर $क = \frac{ग + घ}{२}$ आणि $ख = \frac{ग - घ}{२}$

मागील अनुच्छेदाचें (४) थें सूत्र

$कोज्या(क + ख) - कोज्या(क - ख) = -२ ज्या क ज्या ख$
$= २ ज्या क ज्या(-ख)$

असेंहि लिहितां येते हें घ्यानांत ठेवून ७·६ अनुच्छेदाच्या (१), (२), (३), (४) या फलांत क व ख करिता अनुक्रमें $\frac{ग + घ}{२}$ व $\frac{ग - घ}{२}$ हे आदेश (substitutions) करा.

त्यामुळे केवळ दोन ज्या किंवा केवळ दोन कोटिज्या यांच्या योगांचें अथवा वियोगांचें, ज्या व कोटिज्या यांच्या गुणाकारांत रूपांतर करणारीं खालील चार सूत्रें आपणांस मिळतात.

$ज्या ग + ज्या घ = २ ज्या \frac{ग + घ}{२} कोज्या \frac{ग - घ}{२}$ ... (१)

$ज्या ग - ज्या घ = २ कोज्या \frac{ग + घ}{२} ज्या \frac{ग - घ}{२}$ ... (२)

$कोज्या ग + कोज्या घ = २ कोज्या \frac{ग + घ}{२} कोज्या \frac{ग - घ}{२}$ ... (३)

$कोज्या ग - कोज्या घ = २ ज्या \frac{ग + घ}{२} ज्या \frac{घ - ग}{२}$ ... (४)

या सूत्रांना गुणनसूत्रें म्हणतात.

७८ दिलेली ज्या असणाऱ्या सर्व कोणांची सामान्य पदसंहति काढा.

समजा दिलेली ज्या असणारा इ हा अविष्ठ कोण आहे, व तितकीच ज्या असणारा अ हा दुसरा एक कोण आहे.

आता आपणांस ज्या अ = ज्या इ या समीकराचें समाधान करणारी अ ची सामान्यतम अर्हा काढावयाची आहे.

$$ज्या\ अ = ज्या\ इ$$

किंवा $ज्या\ अ - ज्या\ इ = ०$

म्हणून ७७ अनुच्छेदांतील (२) वरून,

$$२ज्या \frac{अ - इ}{२} कोज्या \frac{अ + इ}{२} = ०$$

म्हणून, एकतर $ज्या\ \frac{अ - इ}{२} = ०$

अर्थात् $\frac{१}{२}(अ - इ)$ = प्या चा कोणताहि अपवर्त्य

$$= घ\ प्या$$

अर्थात् $अ = २\ घ\ प्या + इ$ ....(१)

किंवा $कोज्या \frac{अ + इ}{२} = ०$

म्हणजे $\frac{\text{अ}+\text{इ}}{२} = \frac{\text{प्या}}{२}$ चा कोणताहि विषम अवयव

$$= (२\text{घ}+१)\frac{\text{प्या}}{२}$$

अर्थात् $\text{अ} = -\text{इ} + (२\text{घ}+१)\,\text{प्या}$ ....(२)

म शून्य किंवा कोणताहि धन या ऋण पूर्णांक असेल तर वरील दोन्ही अहां $\text{अ} = \text{म}\,\text{प्या} + (-१)^{\text{म}}\,\text{इ}$ या पदसंहतींत समाविष्ट होतात.

अशाच रीतीने दिलेली कोटिज्या किंवा दिलेली स्पर्शज्या असणाऱ्या सर्व कोणांच्या सामान्य पदसंहती काढतां येतात.

७·९. उदाहरण १. सिद्ध करा :—

$$२\text{ज्या}\frac{\text{प्या}}{११}\ \text{ज्या}\ \frac{७\ \text{प्या}}{११} + \text{ज्या}\ \frac{\text{प्या}}{२२} - \text{ज्या}\ \frac{५\ \text{प्या}}{२२} = ०$$

(७·६) अनुच्छेदांतील (८) वरून,

$$२\text{ज्या}\frac{\text{प्या}}{११}\ \text{ज्या}\ \frac{७\ \text{प्या}}{११} = \text{कोज्या}\ \frac{६\ \text{प्या}}{११} - \text{कोज्या}\ \frac{८\ \text{प्या}}{११}$$

$$\text{परंतु कोज्या}\ \frac{६\text{प्या}}{११} = \text{कोज्या}\left(\frac{\text{प्या}}{२} + \frac{\text{प्या}}{२२}\right)$$

$$= -\text{ज्या } \frac{\text{π्या}}{२२}$$

$$\text{आणि कोज्या } \frac{८\text{π्या}}{११} = \text{ज्या}\left(\frac{\text{π्या}}{२} - \frac{८\text{π्या}}{११}\right)$$

$$= \text{ज्या } \left(-\frac{५\text{π्या}}{२२}\right)$$

$$= -\text{ज्या } \frac{५\text{π्या}}{२२}$$

$$\text{म्हणून } २\text{ज्या } \frac{\text{π्या}}{११} \text{ज्या } \frac{७\text{π्या}}{११} = -\text{ज्या } \frac{\text{π्या}}{२२} + \text{ज्या } \frac{५\text{π्या}}{२२}$$

$$\text{किंवा } २\text{ज्या } \frac{\text{π्या}}{११} \text{ज्या } \frac{७\text{π्या}}{११} + \text{ज्या } \frac{\text{π्या}}{२२} - \text{ज्या } \frac{५\text{π्या}}{२२} = ०$$

उदाहरण २. सरळ रूप द्या :—

$$\frac{\text{ज्या अ} + \text{ज्या } २\text{ अ} + \text{ज्या } ३\text{ अ} + \text{ज्या } ४\text{ अ}}{\text{कोज्या अ} + \text{कोज्या } २\text{ अ} + \text{कोज्या } ३\text{ अ} + \text{कोज्या } ४\text{ अ}}$$

आता, ज्या अ + ज्या २ अ + ज्या ३ अ + ज्या ४ अ

$$= (\text{ज्या अ} + \text{ज्या } ४\text{ अ}) + (\text{ज्या } २\text{ अ} + \text{ज्या } ३\text{ अ})$$

$$= २\text{ज्या } \frac{५\text{अ}}{२} \text{ कोज्या } \frac{३\text{अ}}{२} + २\text{ज्या } \frac{५\text{अ}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{अ}}{२}$$

(७·७ अनुच्छेदाने)

$$= २ज्या\,\frac{५अ}{२}\left(कोज्या\,\frac{३अ}{२} + कोज्या\,\frac{अ}{२}\right)$$

शिवाय, कोज्या अ + कोज्या २ अ + कोज्या ३ अ + कोज्या ४ अ

$$= (कोज्या\,अ + कोज्या\,४अ) + (कोज्या\,२अ + कोज्या\,३अ)$$

$$= २कोज्या\,\frac{५अ}{२}कोज्या\,\frac{३अ}{२} + २कोज्या\,\frac{५अ}{२}कोज्या\,\frac{अ}{२}$$

(७·७ अनुच्छेदाने)

$$= २कोज्या\,\frac{५अ}{२}\left(कोज्या\,\frac{३अ}{२} + कोज्या\,\frac{अ}{२}\right)$$

म्हणून, दिलेली पदसंहति

$$= \frac{२ज्या\,\frac{५अ}{२}\left(कोज्या\,\frac{३अ}{२} + कोज्या\,\frac{अ}{२}\right)}{२कोज्या\,\frac{५अ}{२}\left(कोज्या\,\frac{३अ}{२} + कोज्या\,\frac{अ}{२}\right)}$$

$$= स्प\,\frac{५अ}{२}$$

उदाहरणसंग्रह १०

(१) $\text{ज्या क} = \frac{१}{\sqrt{२}}$ व $\text{ज्या ख} = \frac{१}{\sqrt{३}}$ असल्यास

$\text{स्प}\left(\frac{\text{क}+\text{ख}}{२}\right) \text{कोस्प}\left(\frac{\text{क}-\text{ख}}{२}\right)$ चें मान काढा.

[कलकत्ता १८७५

सिद्ध कराः—

(२) $\frac{\text{कोज्या २क} - \text{कोज्या ४क}}{\text{ज्या ४क} - \text{ज्या २क}} = \text{स्प ३क}$

[कलकत्ता १८९३

(३) $\frac{\text{ज्या क} + \text{ज्या ख}}{\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ख}} = \text{स्प}\frac{\text{क}+\text{ख}}{२}$

[कलकत्ता १८७३

(४) $\text{कोज्या क} + \text{कोज्या } (१२०^\circ + \text{क}) + \text{कोज्या}(१२०^\circ - \text{क}) = ०$

[कलकत्ता १९१७

(५) $\frac{\text{ज्या३अ} - \text{२ज्या७अ} + \text{ज्या११अ}}{\text{कोज्या३अ} - \text{२कोज्या ७अ} + \text{कोज्या ११अ}} = \text{स्प ७अ}$

(६) कोज्या२क + कोज्या ४क + कोज्या ६क + कोज्या ८क
= ४कोज्या क कोज्या २क कोज्या ५क
[कलकत्ता १८८७

(७) ज्या १०° + ज्या २०° + ज्या ४०° + ज्या ५०°
= ज्या ७०° + ज्या ८०°

(८) कोज्या ५५° + कोज्या ६५° + कोज्या १७५° = ०
[कलकत्ता १८७६

(९) स्प ७०° = २ स्प ५०° + स्प २०°
[बनारस १९४३

(१०) ज्या २०° ज्या ४०° ज्या ६०° ज्या ८०° $= \frac{३}{१६}$
[नागपूर १९३६

(११) कोज्या १५° − ज्या १५° $= \frac{१}{\sqrt{२}}$
[बनारस १९३८

(१२) स्प $\frac{क + ख}{२}$ + स्प $\frac{क - ख}{२}$ $= \frac{२ \text{ ज्या क}}{\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ख}}$
[बनारस १९३९

(१३) जर (व्युज्ज्या क + व्युत्कोज्या क)

$= ($व्युज्ज्या ख + व्युत्कोज्या ख$)$ असेल तर

स्पक स्पख $=$ कोस्प $\left(\frac{\text{क}+\text{ख}}{२}\right)$ हें दाखवा.

[पाटणा १९३६

(१४) जर $\frac{\text{स्प अ}}{\text{य}} = \frac{\text{स्प आ}}{\text{र}} = \frac{\text{स्प इ}}{\text{ल}}$ असेल तर

$\left(\frac{\text{र}+\text{ल}}{\text{र}-\text{ल}}\right)$ ज्या^{२}(आ $-$ इ) $+ \left(\frac{\text{ल}+\text{य}}{\text{ल}-\text{य}}\right)$ज्या^{२} (इ $-$ अ)

$+ \left(\frac{\text{य}+\text{र}}{\text{य}-\text{र}}\right)$ ज्या^{२} (अ $-$ आ) $= ०$ हें सिद्ध करा.

[बनारस १९२७

सिद्ध कराः—

(१५) $\frac{\text{ज्या११क ज्याक + ज्या७क ज्या३क}}{\text{कोज्या ११ क ज्या क + कोज्या७क ज्या३क}}$

$=$ स्प ८ क [पंजाब १९१२

(१६) कोज्या २ अ कोज्या $\frac{\text{अ}}{२}$ $-$ कोज्या अ कोज्या $\frac{७\text{ अ}}{२}$

$=$ ज्या $\frac{३\text{ अ}}{२}$ ज्या ३ अ

(१७) ज्या $\frac{११\text{ अ}}{४}$ ज्या $\frac{\text{अ}}{४}$ $+$ ज्या $\frac{७\text{ अ}}{४}$ ज्या $\frac{३\text{ अ}}{४}$

$=$ ज्या २ अ ज्या अ

[कलकत्ता १९०४

(१८) $ज्या \frac{क - ख - ग}{२} ज्या \frac{ख - ग}{२}$

$$+ ज्या \frac{ख + क - ग}{२} ज्या \frac{ख + ग}{२}$$

$$= ज्या ख \ ज्या \frac{क}{२}$$

[कलकत्ता १८८५

प्रकरण आठवें

अपवर्त्य आणि अपवर्त्तक कोणांच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती

अपवर्त्य कोण

८.१ २क कोणाच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती क कोणाच्या निष्पत्तींच्या रूपांत काढणें.

७.१ या अनुच्छेदाच्या सूत्रांमधे ख=क ठेवल्यास

$\text{ज्या } २\text{क} = \text{ज्या क कोज्या क} + \text{कोज्या क ज्याक}$

$= २ \text{ ज्या क कोज्या क} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (१)$

$\text{कोज्या } २\text{क} = \text{कोज्या क कोज्या क} - \text{ज्याक ज्याक}$

$= \text{कोज्या}^{२} \text{क} - \text{ज्या}^{२} \text{क}$

आता, $\text{कोज्या}^{२}\text{क} - \text{ज्या}^{२}\text{क} = \text{कोज्या}^{२}\text{क} - (१ - \text{कोज्या}^{२}\text{क})$

$= २\text{कोज्या}^{२}\text{क} - १$

$= २(१ - \text{ज्या}^{२}\text{क}) - १$

$= १ - २ \text{ ज्या}^{२}\text{क}$

$\therefore$ कोज्या २ क = कोज्या²क − ज्या²क

= २ कोज्या²क − १

= १ − २ज्या²क ....(२)

पुन्हा स्प २ क = $\frac{\text{ज्या २ क}}{\text{कोज्या २ क}}$

= $\frac{\text{२ ज्या क कोज्या क}}{\text{कोज्या² क − ज्या² क}}$

अंश व हर या दोहोंस कोज्या²क ने भागून

स्प २ क = $\frac{\text{२ स्प क}}{\text{१ − स्प² क}}$ ....(३)

७·२ या अनुच्छेदांतील सूत्र (१) मध्ये ख = क ठेवूनहि सूत्र (३) मिळविता येतें

जसें, स्प२ क = $\frac{\text{स्प क + स्प क}}{\text{१ − स्प क·स्प क}}$

= $\frac{\text{२ स्प क}}{\text{१ − स्प² क}}$

उपसाध्य :— सूत्र (२) वरून

$$१ + \text{कोज्या } २\text{क} = २\ \text{कोज्या}^२\text{क}$$

$$\text{आणि } १ - \text{कोज्या } २\text{क} = २\ \text{ज्या}^२\text{क}$$

८·२ ३क कोनाच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती क च्या निष्पत्तींच्या रूपात काढणे

$$\begin{aligned}
\text{ज्या } ३\text{क} &= \text{ज्या } (२\text{क} + \text{क}) \\
&= \text{ज्या } २\text{क कोज्या क} + \text{कोज्या } २\text{क ज्या क} \\
&= २\text{ज्या क कोज्या क}.\text{कोज्या क} + (\text{कोज्या}^२\text{क} - \text{ज्या}^२\text{क})\ \text{ज्या क} \\
&= ३\text{ज्या क कोज्या}^२\text{क} - \text{ज्या}^३\text{क} \\
&= ३\text{ज्या क } (१ - \text{ज्या}^२\text{क}) - \text{ज्या}^३\text{क}
\end{aligned}$$

$$\text{ज्या}३\text{क} = ३\text{ज्या क} - ४\text{ज्या}^३\text{क} \qquad (४)$$

$$\begin{aligned}
\text{कोज्या}३\text{क} &= \text{कोज्या}(२\text{क} + \text{क}) \\
&= \text{कोज्या}२\text{क कोज्या क} - \text{ज्या}२\text{क ज्या क} \\
&= (२\text{कोज्या}^२\text{ क} - १)\ \text{कोज्या क} - २\text{ज्या क कोज्याक ज्याक} \\
&= २\text{कोज्या}^३\text{ क} - \text{कोज्या क} - २\text{कोज्या क} \times (१ - \text{कोज्या}^२\text{ क})
\end{aligned}$$

$$\text{कोज्या } ३\text{ क} = ४\ \text{कोज्या}^३\text{ क} - ३\ \text{कोज्या क} \qquad (५)$$

$$\begin{aligned}
\text{स्प } ३\text{ क} &= \text{स्प } (२\text{ क} + \text{क}) \\
&= \frac{\text{स्प } २\text{ क} + \text{स्प क}}{१ - \text{स्प } २\text{क स्प क}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{२ \text{ स्प क}}{१ - \text{स्प}^२ \text{ क}} + \text{स्प क}}{१ - \frac{२ \text{ स्प क}}{१ - \text{स्प}^२ \text{ क}} \times \text{स्प क}}$$

$$= \frac{२ \text{ स्प क} + (१ - \text{स्प}^२ \text{ क}) \text{ स्प क}}{१ - \text{स्प}^२ \text{ क} - २ \text{ स्प क. स्प क}}$$

$$\therefore \text{ स्प } ३ \text{ क} = \frac{३ \text{ स्प क} - \text{स्प}^३ \text{ क}}{१ - ३ \text{ स्प}^२ \text{ क}} \qquad ......(६)$$

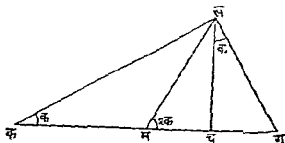
(४) व (५) या सूत्रांना

$$\text{ज्या } ३ \text{ क} = \text{कोज्या}^३ \text{ क } (३ \text{ स्प क} - \text{स्प}^३ \text{ क})$$

$$\text{कोज्या } ३ \text{ क} = \text{कोज्या}^३ \text{ क } (१ - ३ \text{ स्प}^२ \text{ क})$$

हीं रूपेंहि देतां येतात हें सहज दिसून येईल.

८·२ २ क च्या निष्पत्ती रीतिकीनें काढणें.



आ. ८·१

समजा कस रेषा कग रेषेशीं क हा कोण करते. कग रेषेवर म हा कोणताहि बिंदु केन्द्र घेऊन मक त्रिज्या असलेलें एक वृत्त काढा.

$$= \frac{\frac{२खच}{कच}}{१ - \left(\frac{चग}{चख}\right)\left(\frac{चख}{कच}\right)}$$

$$= \frac{२ \text{ स्प } क}{१ - \text{स्प}^2 \text{ क}}$$

८·३१ उदाहरण १. ज्या ५अ ज्या अ च्या रूपांत व्यक्त करा.

ज्या ५अ

$= \text{ज्या } (३ \text{ अ} + २ \text{ अ})$

$= \text{ज्या } ३ \text{ अ कोज्या } २ \text{ अ} + \text{कोज्या } ३ \text{ अ ज्या } २ \text{ अ}$

$= (३ \text{ ज्या अ} - ४ \text{ ज्या}^3 \text{ अ}) (१ - २ \text{ ज्या}^2 \text{ अ})$
$+ (४ \text{ कोज्या}^3 \text{अ} - ३ \text{ कोज्या अ}). २\text{ज्या अ कोज्या अ}$

$= (३ \text{ ज्या अ} - १० \text{ ज्या}^3 \text{ अ} + ८ \text{ ज्या}^5 \text{ अ})$
$+ २ \text{ ज्या अ कोज्या}^2 \text{ अ } (४ \text{ कोज्या}^2 \text{ अ} - ३)$

$= (३ \text{ ज्या अ} - १० \text{ ज्या}^3 \text{ अ} + ८ \text{ ज्या}^5 \text{ अ})$
$+ २ \text{ ज्या अ } (१ - \text{ज्या}^2 \text{ अ}) (१ - ४ \text{ ज्या}^2 \text{ अ})$

$= (३ \text{ ज्या अ} - १० \text{ ज्या}^3 \text{ अ} + ८ \text{ ज्या}^5 \text{ अ})$
$+ २ \text{ ज्या अ } (१ - ५ \text{ ज्या}^2 \text{ अ} + ४ \text{ ज्या}^4 \text{ अ})$

$= ५ \text{ ज्या अ} - २० \text{ ज्या}^3 \text{ अ} + १६ \text{ ज्या}^5 \text{ अ}$

उदाहरण २. $\frac{१ + \text{ज्या } २ \text{ अ} - \text{कोज्या } २ \text{ अ}}{१ + \text{ज्या } २ \text{ अ} + \text{कोज्या } २ \text{ अ}} = \text{स्प अ}$

हें सिद्ध करा. [कलकत्ता १९३८

वामपक्ष $= \frac{(१ - \text{कोज्या } २ \text{ अ}) + \text{ज्या } २ \text{ अ}}{(१ + \text{कोज्या } २ \text{ अ}) + \text{ज्या } २ \text{ अ}}$

$$= \frac{२ \text{ ज्या}^2 अ + २ \text{ज्या } अ \text{ कोज्या } अ}{२ \text{ कोज्या}^2 अ + २ \text{ज्या } अ \text{ कोज्या } अ}$$

$$= \frac{२ \text{ ज्या } अ (\text{ज्या } अ + \text{कोज्या } अ)}{२ \text{ कोज्या } अ (\text{कोज्या } अ + \text{ज्या } अ)}$$

$$= \frac{\text{ज्या } अ}{\text{कोज्या } अ} = \text{स्प } अ = \text{दक्षिणपक्ष}$$

उदाहरण २. $\frac{\text{व्युत्कोज्या } ८क - १}{\text{व्युत्कोज्या } ४क - १} = \frac{\text{स्प } ८क}{\text{स्प } २क}$

हें सिद्ध करा.

$$\text{वामपक्ष} = \frac{\frac{१}{\text{कोज्या } ८क} - १}{\frac{१}{\text{कोज्या } ४क} - १}$$

$$= \frac{\text{कोज्या } ४क}{\text{कोज्या } ८क} \times \frac{१ - \text{कोज्या } ८क}{१ - \text{कोज्या } ४क}$$

$$= \frac{\text{कोज्या } ४क}{\text{कोज्या } ८क} \times \frac{२ \text{ ज्या}^2 ४क}{२ \text{ ज्या}^2 २क}$$

$$= \frac{२ \text{ ज्या } ४क \text{ कोज्या } ४क}{\text{कोज्या } ८क} \times \frac{\text{ज्या } ४क}{२ \text{ ज्या}^2 २क}$$

$$= \frac{\text{ज्या } ८क}{\text{कोज्या } ८क} \times \frac{२ \text{ ज्या } २क \text{ कोज्या } २क}{२ \text{ ज्या}^2 २क}$$

$$= \text{स्प } ८क \times \frac{\text{कोज्या } २क}{\text{ज्या } २क}$$

$$= \frac{\text{स्प } ८क}{\text{स्प } २क} = \text{दक्षिणपक्ष}$$

उदाहरणसंग्रह ११

(१) स्प ४क, स्प क च्या रूपांत व्यक्त करा. [कलकत्ता १९१८

सिद्ध करा :—

(२) $\frac{\text{ज्या } 2\text{ क}}{1-\text{कोज्या } 2\text{ क}}=\text{कोस्प क}$

(३) $\text{स्प क}+\text{कोस्प क}=2\text{ व्युज्ज्या } 2\text{ क}$ [कलकत्ता १९१८

(४) $\frac{\text{कोज्या } 2\text{ अ}}{1+\text{ज्या } 2\text{ अ}}=\text{स्प }(45^\circ-\text{अ})=\frac{1-\text{ज्या } 2\text{ अ}}{\text{कोज्या } 2\text{ अ}}$

(५) $\text{कोज्या}^2\text{ क}+\text{कोज्या}^2(60^\circ+\text{क})+\text{कोज्या}^2(60^\circ-\text{क})=\frac{3}{2}$ [पाटणा १९३७

(६) $\text{कोस्प क}+\text{कोस्प }(60^\circ+\text{क})+\text{कोस्प }(120^\circ+\text{क})=3\text{ कोस्प } 3\text{ क}$ [पाटणा १९४५

(७) $\frac{1-\text{स्प}^2(45^\circ-\text{अ})}{1+\text{स्प}^2(45^\circ-\text{अ})}=\text{ज्या } 2\text{ अ}$

(८) $\frac{2\text{ ज्या अ}}{\text{ज्या}2\text{अ}}+\frac{\text{स्प अ}}{\text{स्प } 2\text{ अ}}=1$ [मुंबई १८९६

(९) $ज्या\,६क = ४\, ज्या\, २क\, ज्या\, (६०^\circ + २क) \times ज्या\, (६०^\circ - २क)$ [कलकत्ता १८९३

(१०) $ज्या\,(२स+१)य\, ज्या\, य = ज्या^२\,(स+१)य - ज्या^२\,सय$

(११) जर $२\,स्प\,अ = ३\,स्प\,आ$ असेल तर

$$स्प\,(अ - आ) = \frac{ज्या\,२\,आ}{५ - कोज्या\,२आ}$$ हें दाखवा.

[कलकत्ता १९४६

सिद्ध करा. :—

(१२) $४\,(कोज्या^३\,क\, ज्या\,३क + ज्या^३\,क\, कोज्या\,३क) = ३ज्या\,४क$ [बनारस १९३५

(१३) $कोज्या^३\,क\, कोज्या\, ३क + ज्या^३\,क\, ज्या\, ३क = कोज्या^३\,२क$ [पाटणा १९४३

(१४) $ज्या^३\,क + ज्या^३\,(१२०^\circ + क) + ज्या^३\,(२४०^\circ + क) = -\frac{३}{४}ज्या\,३क$ [पाटणा १९३९

(१५) $स्प३क\, स्प२क\, स्प\,क = स्प३क - स्प२क - स्प\,क$ [पाटणा १९३७

अपवर्तक (submultiple) कोण

८·४ $ज्या२क = २\, ज्या\, क\, कोज्या\, क$

$कोज्या\,२क = कोज्या^२\,क - ज्या^२\,क = २\,कोज्या^२\,क - १ = १ - २\,ज्या^२\,क$

आणि $$स्प\,२क = \frac{२\,स्प\,क}{१ - स्प^२\,क}$$

हीं अपवर्त्य कोणांचीं सूत्रें क चें मान कांहीहि असेल तरी सत्य आहेत. म्हणून २क च्या जागीं क आणि क च्या जागीं $\frac{क}{२}$ ठेवले तरी ती सत्यच राहतील.

म्हणून हे आदेश करून आपणांस अपवर्तक कोणांचीं पुढील सूत्रें मिळतात.

$$ज्याक = २ \, ज्या \frac{क}{२} \; कोज्या \frac{क}{२}$$

$$कोज्या \, क = कोज्या^{२} \frac{क}{२} - ज्या^{२} \frac{क}{२} = २ \, कोज्या^{२} \frac{क}{२} - १$$

$$= १ - २ \, ज्या^{२} \frac{क}{२}$$

$$आणि \quad स्प \, क = \frac{२ \, स्प \frac{क}{२}}{१ - स्प^{२} \frac{क}{२}}$$

८·५ आता आपण ज्या क आणि कोज्या क, स्प $\frac{क}{२}$ च्या रूपांत व्यक्त करूं.

$$ज्या \, क = २ ज्या \frac{क}{२} \; कोज्या \frac{क}{२}$$

$$= \frac{२ ज्या \frac{क}{२}}{कोज्या \frac{क}{२}} \cdot कोज्या^{२} \frac{क}{२}$$

$$= २\ स्प \frac{क}{२} \cdot \frac{१}{व्युत्कोज्या^{२} \frac{क}{२}}$$

$$= \frac{२\ स्प \frac{क}{२}}{१ + स्प^{२} \frac{क}{२}}$$

$$कोज्या\ क = कोज्या^{२} \frac{क}{२} - ज्या^{२} \frac{क}{२}$$

$$= कोज्या^{२} \frac{क}{२} - \frac{ज्या^{२} \frac{क}{२}}{कोज्या^{२} \frac{क}{२}} \cdot कोज्या^{२} \frac{क}{२}$$

$$= कोज्या^{२} \frac{क}{२} \left(१ - \frac{ज्या^{२} \frac{क}{२}}{कोज्या^{२} \frac{क}{२}}\right)$$

$$= \frac{१}{व्युत्कोज्या^{२} \frac{क}{२}} \left(१ - स्प^{२} \frac{क}{२}\right)$$

$$= \frac{१ - स्प^{२} \frac{क}{२}}{१ + स्प^{२} \frac{क}{२}}$$

८७ ज्या $\frac{क}{२}$, कोज्या $\frac{क}{२}$ व स्प $\frac{क}{२}$ च्या अहीं ज्या क च्या रूपांत काढणें.

$$\text{आता ज्या क} = २\text{ज्या}\frac{क}{२}\,\text{कोज्या}\frac{क}{२}$$

$$\text{आणि } १ = \text{ज्या}^{२}\frac{क}{२} + \text{कोज्या}^{२}\frac{क}{२}$$

वरील दोन समीकारांचा योग आणि वियोग करून,

$$१ + \text{ज्या क} = \left(\text{कोज्या}\frac{क}{२} + \text{ज्या}\frac{क}{२}\right)^{२} \quad ..(१)$$

$$१ - \text{ज्या क} = \left(\text{कोज्या}\frac{क}{२} - \text{ज्या}\frac{क}{२}\right)^{२} \quad ...(२)$$

(१) व (२) चें वर्गमूळ (square root) काढून,

$$\text{कोज्या}\frac{क}{२} + \text{ज्या}\frac{क}{२} = \pm\sqrt{१ + \text{ज्या क}} \quad ..(३)$$

$$\text{कोज्या}\frac{क}{२} - \text{ज्या}\frac{क}{२} = \pm\sqrt{१ - \text{ज्या क}} \quad ...(४)$$

(३) व (४) यांचा योग आणि वियोग करून,

$$\text{कोज्या}\frac{क}{२} = \pm\frac{१}{२}\sqrt{१ + \text{ज्या क}}$$

$$\pm\frac{१}{२}\sqrt{१ - \text{ज्या क}} \quad (५)$$

$$\text{ज्या}\,\frac{\text{क}}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\text{ज्या क}}$$
$$\mp\frac{1}{2}\sqrt{1-\text{ज्या क}} \quad ....(६)$$

(६) ला (५) ने भागून स्प$\frac{\text{क}}{2}$ काढतां येतें.

८·७१ चिन्हांच्या संदिग्धतेचें स्पष्टीकरण.

क न देतां ज्या क दिलेली असेल तर ६ व्या प्रकरणांत स्पष्ट केल्याप्रमाणे ज्या क च्या दिलेल्या अर्हेकरितां क च्या अर्हांची एक श्रेढी बनते. म्हणून दोन संभाव्य चरणांपैकी कोणत्याहि एकांत $\frac{\text{क}}{2}$ राहूं शकतो.

आता, $\text{कोज्या}\,\frac{\text{क}}{2}+\text{ज्या}\,\frac{\text{क}}{2}$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{क}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{ज्या}\,\frac{\text{क}}{2}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\text{ज्या}\,\frac{\text{प्या}}{4}\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{2}+\text{कोज्या}\,\frac{\text{प्या}}{4}\,\text{ज्या}\,\frac{\text{क}}{2}\right)$$

$$=\sqrt{2}\,\text{ज्या}\left(\frac{\text{प्या}}{4}+\frac{\text{क}}{2}\right).$$

तसेंच, $\text{कोज्या}\,\frac{\text{क}}{2}-\text{ज्या}\frac{\text{क}}{2}=\sqrt{2}\,\text{ज्या}\left(\frac{\text{प्या}}{4}-\frac{\text{क}}{2}\right)$

क दिलेला असेल तेव्हां $\frac{\text{प्या}}{४}+\frac{\text{क}}{२}$ आणि $\frac{\text{प्या}}{४}-\frac{\text{क}}{२}$ कोणत्या चरणांत आहेत हें निश्चितपणें माहीत होतें. म्हणून कोज्या $\frac{\text{क}}{२}$ + ज्या $\frac{\text{क}}{२}$ आणि कोज्या $\frac{\text{क}}{२}$ − ज्या $\frac{\text{क}}{२}$ यांचीं चिन्हें ठरवितां येतात. अशा रीतीनें, ज्या $\frac{\text{क}}{२}$ व कोज्या $\frac{\text{क}}{२}$ यांचीं चिन्हें निश्चितपणें माहीत होतील.

उदाहरण. ज्या $१८^\circ = \frac{\sqrt{५}-१}{४}$ घेऊन ज्या९° व कोज्या९° काढा.

येथे क $= १८^\circ$, म्हणून $\frac{\text{क}}{२} = ९^\circ$

अनुच्छेद ८.७ च्या (३) व (४) या सूत्रांवरून,

कोज्या९° + ज्या ९°

$$= +\sqrt{१+\text{ज्या } १८^\circ} = \sqrt{\frac{३+\sqrt{५}}{२}} \qquad -(१)$$

कोज्या९° − ज्या ९°

$$= +\sqrt{१-\text{ज्या}१८^\circ} = \sqrt{\frac{५-\sqrt{५}}{२}} \qquad -(२)$$

[$\angle ९^\circ$ पहिल्या चरणांत असल्यामुळे ज्या ९° व कोज्या ९° ही दोन्ही धन आहेत व म्हणून कोज्या ९° + ज्या ९° धन आहे. तसेंच, कोज्या ९° − ज्या$९^\circ = \sqrt{२}$ ज्या$\left(\frac{\text{प्या}}{४} - ९^\circ\right)$

ही संहति सुद्धा धन आहे हें उघड आहे.]

(१) व (२) चा योग व वियोग करून,

$$\text{कोज्या}९^\circ = \frac{\sqrt{३+\sqrt{५}}+\sqrt{५-\sqrt{५}}}{४}$$

$$\text{व ज्या}९^\circ = \frac{\sqrt{३+\sqrt{५}}-\sqrt{५-\sqrt{५}}}{४}$$

८१° कोण ९°चा लंबपूरक असल्यामुळे ८१° च्या निष्पत्ती आता लिहितां येतील.

८.८ स्प $\frac{क}{२}$ स्प क च्या रूपांत काढणें.

$$\text{आता, स्प क} = \frac{२\ \text{स्प}\ \frac{क}{२}}{१-\text{स्प}^२\frac{क}{२}}$$

$$\therefore \text{स्प क स्प}^२\frac{क}{२} + २\,\text{स्प}\frac{क}{२} - \text{स्प क} = ०$$

या समीकारावरून सहज अनुमान निघतें की

$$\text{स्प}\frac{क}{२} = \frac{-१\pm\sqrt{१+\text{स्प}^२क}}{\text{स्प क}}$$

या संबंधांतील संदिग्धतेचें स्पष्टीकरण मागें दिल्याप्रमाणेच आहे.

८·९ १८° व ३६° च्या निष्पत्ती.

समजा $क = १८°$. मग $५ क = ९०°$

किंवा $२क = ९०° - ३क$

म्हणून $ज्या\ २क = कोज्या\ ३\ क$

किंवा $२ज्या\ क\ कोज्या\ क = कोज्या\ क\ (४कोज्या^२ क - ३)$

आता, कोज्या क म्हणजे कोज्या १८° असल्याने शून्य असू शकत नाही.

$$म्हणून\ २ज्या\ क = ४\ कोज्या^२ क - ३$$
$$= १ - ४\ ज्या^२ क$$
$$किंवा\ ४ज्या^२ क + २ज्या\ क - १ = ०$$

$$\therefore \quad ज्या\ क = \frac{-२ \pm \sqrt{४ + १६}}{८}$$
$$= \frac{\pm \sqrt{५} - १}{४}$$

आता, येथे क एक धन न्यूनकोण आहे. म्हणून ऋण अर्थ सोडून,

$$ज्या\ १८° = \frac{\sqrt{५} - १}{४}$$
$$\therefore कोज्या\ १८° = + \sqrt{१ - ज्या^२ १८°}$$
$$= \frac{१}{४} \sqrt{१० + २\sqrt{५}}$$

पुन्हा, $कोज्या\ ३६° = १ - २ज्या^२ १८°$

$$=\frac{१}{४}\left(\sqrt{५}+१\right)$$

$$\text{ज्या } ३६^\circ = \sqrt{१-\text{कोज्या}^२ ३६^\circ}$$

$$=\frac{१}{४}\sqrt{१०-२\sqrt{५}}$$

उदाहरणः— ५४° व ७२° च्या निष्पत्ती काढा.

८.२१ उदाहरण १. जर $\text{स्प}\frac{ई}{२}=\sqrt{\frac{१-न}{१+न}}\,\text{स्प}\frac{इ}{२}$

असेल तर

$\text{कोज्या } इ=\frac{\text{कोज्या } ई-न}{१-न\ \text{कोज्या } ई}$ हें सिद्ध करा.

आता, $\text{स्प}\frac{ई}{२}=\sqrt{\frac{१-न}{१+न}}\,\text{स्प}\frac{इ}{२}$

किंवा $\text{स्प}\frac{इ}{२}=\sqrt{\frac{१+न}{१-न}}\,\text{स्प}\frac{ई}{२}$

म्हणून $\text{कोज्या } इ=\frac{१-\text{स्प}^२\frac{इ}{२}}{१+\text{स्प}^२\frac{इ}{२}}$, (८.५ अनुच्छेदाने)

$$=\frac{१-\frac{१+न}{१-न}\text{स्प}^२\frac{ई}{२}}{१+\frac{१+न}{१-न}\text{स्प}^२\frac{ई}{२}}$$

$$\text{आता,}\quad \text{ज्या}\,\frac{\text{व्या}}{\text{२}} = \text{२ ज्या}\,\frac{\text{व्या}}{\text{२}^{\text{२}}}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{व्या}}{\text{२}^{\text{२}}}$$

$$\text{ज्या}\,\frac{\text{व्या}}{\text{२}^{\text{२}}} = \text{२ ज्या}\,\frac{\text{व्या}}{\text{२}^{\text{३}}}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{व्या}}{\text{२}^{\text{३}}}$$

$$\text{ज्या}\,\frac{\text{व्या}}{\text{२}^{\text{३}}} = \text{२ ज्या}\,\frac{\text{व्या}}{\text{२}^{\text{४}}}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{व्या}}{\text{२}^{\text{४}}}$$

....

$$\text{तसेंच,}\quad \text{ज्या}\,\frac{\text{व्या}}{\text{२}^{\text{स}}} = \text{२ ज्या}\,\frac{\text{व्या}}{\text{२}^{\text{स+१}}}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{व्या}}{\text{२}^{\text{स+१}}}$$

वरील सर्व समीकार एकत्र गुणून,

$$\text{ज्या}\,\frac{\text{व्या}}{\text{२}} = \text{२}^{\text{स}}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{व्या}}{\text{२}^{\text{२}}}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{व्या}}{\text{२}^{\text{३}}}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{व्या}}{\text{२}^{\text{४}}} \cdots \text{कोज्या}\,\frac{\text{व्या}}{\text{२}^{\text{स+१}}}\,\text{ज्या}\,\frac{\text{व्या}}{\text{२}^{\text{स+१}}}$$

$$\text{परंतु ज्या}\,\frac{\text{व्या}}{\text{२}} = \text{१}$$

$$\therefore\ \text{१} = \text{२}^{\text{स}}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{व्या}}{\text{२}^{\text{२}}}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{व्या}}{\text{२}^{\text{३}}}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{व्या}}{\text{२}^{\text{४}}} \cdots \text{कोज्या}\,\frac{\text{व्या}}{\text{२}^{\text{स+१}}}\,\text{ज्या}\,\frac{\text{व्या}}{\text{२}^{\text{स+१}}}$$

हें इष्ट फल.

उदाहरणसंग्रह १२

(१) अ, आ धन आणि न्यून असून कोज्या $अ = \frac{३}{५}$ व कोज्या $आ = \frac{१२}{१३}$ आहेत. तर ज्या $\frac{अ+आ}{२}$ काढा.

(२) जर स्प $क = \frac{२ म न}{म^{२} - न^{२}}$ असेल तर स्प $\frac{क}{२}$ काढा.

[कलकत्ता १८८०

(३) (१) कोस्प $\frac{\pi}{८}$ चें मान काढा.

(२) स्प $\left(७\frac{१}{२}\right)^{\circ} = (\sqrt{३} - \sqrt{२})(\sqrt{२} - १)$ हें दाखवा.

(४) उ, ऊ धन आणि न्यून असून

कोज्या $२ उ = \frac{३ \text{ कोज्या } २ ऊ - १}{३ - \text{कोज्या } २ ऊ}$ आहे. तर

स्प $उ = \sqrt{२}$ स्प ऊ हें दाखवा.

[कलकत्ता १९४१

(५) जर स्प अ = कोज्या २ इ असेल तर

ज्या $२ अ = \frac{१ - \text{स्प}^{४} इ}{१ + \text{स्प}^{४} इ}$

हें दाखवा. [कलकत्ता १८७२

सिद्ध करा—

(६) $(\text{कोज्या } इ + \text{कोज्या } ई)^{२} + (\text{ज्या } इ + \text{ज्या } ई)^{२}$
$= ४ \text{ कोज्या}^{२}\left(\frac{इ - ई}{२}\right)$

(७) $(\text{कोज्या } इ - \text{कोज्या } ई)^2 + (\text{ज्या } इ - \text{ज्या } ई)^2$
$= ४ \text{ ज्या}^2\left(\frac{इ - ई}{२}\right)$

(८) $\frac{२ \text{ ज्या क} - \text{ज्या } २ \text{ क}}{२ \text{ ज्या क} + \text{ज्या } २ \text{ क}} = \text{स्प}^2\frac{\text{क}}{२}$ [कलकत्ता १८९२

(९) $\frac{\text{कोस्प}^४\frac{\text{क}}{२} - १}{\text{कोस्प}^४\frac{\text{क}}{२} + १} = \frac{२ \text{ कोज्या क}}{१ + \text{कोज्या}^2 \text{ क}}$ [कलकत्ता १८९९

(१०) (१) $\text{कोज्या}^४\frac{\text{प्या}}{८} + \text{कोज्या}^४\frac{३\text{प्या}}{८}$
$+ \text{कोज्या}^४\frac{५\text{प्या}}{८} + \text{कोज्या}^४\frac{७\text{प्या}}{८} = \frac{३}{२}$

(२) $\text{ज्या}^४\frac{\text{प्या}}{८} + \text{ज्या}^४\frac{३\text{प्या}}{७}$
$+ \text{ज्या}^४\frac{५\text{प्या}}{८} + \text{ज्या}^४\frac{७\text{प्या}}{८} = \frac{३}{२}$
[बनारस १९२७

(११) $\left(१ + \text{स्प}\frac{\text{अ}}{२} + \text{व्युत्कोज्या}\frac{\text{अ}}{२}\right) \times$
$\left(१ + \text{स्प}\frac{\text{अ}}{२} - \text{व्युत्कोज्या}\frac{\text{अ}}{२}\right)$
$= \frac{२ \text{ ज्या अ}}{१ + \text{कोज्या अ}}$

(१२) $\text{स्प}^2\left(\frac{\text{प्या}}{४} - \frac{\text{क}}{२}\right) = \frac{\text{व्युत्कोज्या क} - \text{स्प क}}{\text{व्युत्कोज्या क} + \text{स्प क}}$

(१३) $\text{व्युज्या}\left(\frac{\text{प्या}}{४}+\text{अ}\right)\text{व्युत्कोज्या}\left(\frac{\text{प्या}}{४}-\text{अ}\right)$

$$=\frac{२}{(\text{कोज्या अ}+\text{ज्या अ})}$$

(१४) $\text{ज्या क} = [\text{ज्या}(३६^\circ+\text{क})-\text{ज्या}(३६^\circ-\text{क})$
$-\text{ज्या}(७२^\circ+\text{क})+\text{ज्या}(७२^\circ-\text{क})]$

[नागपूर १९४

(१५) जर $\text{व्युत्कोज्या}(\text{क}+\text{ख})+\text{व्युत्कोज्या}(\text{क}-\text{ख}) = २\ \text{व्युत्कोज्या क}$

असेल, तर $\text{कोज्या क} = \sqrt{२}\ \text{कोज्या}\frac{\text{ख}}{२}$

हें सिद्ध करा. [पाटणा १९४४

(१६) जर $\text{कोज्या अ} = \frac{\text{कोज्या इ}-\text{कोज्या ई}}{१-\text{कोज्या इ कोज्या ई}}$

असेल तर $\text{स्प}\frac{\text{अ}}{२}$ ची एक अहीं $\text{स्प}\frac{\text{इ}}{२}\ \text{कोस्प}\frac{\text{ई}}{२}$

आहे हें सिद्ध करा. [पाटणा १९४२

प्रकरण नववें

ऐकात्म्यें आणि त्रिकोणमितीय समीकार

९·१ तीन कोनांसंबंधी योग-प्रमेय.

आता आपण ज्या (क+ख+ग), कोज्या (क+ख+ग) व स्प (क+ख+ग) यांचे विस्तार (expansions) काढूं.

(१) ज्या (क+ख+ग)
 $=$ ज्या $(\overline{\text{क}+\text{ख}}+\text{ग})$
 $=$ ज्या (क+ख) कोज्या ग + कोज्या (क+ख) ज्या ग
 $=$(ज्या क कोज्या ख + कोज्या क ज्या ख) कोज्या ग
  + (कोज्या क कोज्या ख − ज्या क ज्या ख) ज्या ग
 $=$ ज्या क कोज्या ख कोज्या ग
  + ज्या ख कोज्या ग कोज्या क
  + ज्या ग कोज्या क कोज्या ख
  − ज्या क ज्या ख ज्या ग

हें सूत्र,

ज्या (क+ख+ग) = कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग ×
 [स्प क + स्प ख + स्प ग − स्प क स्प ख स्प ग]

या रूपांतहि व्यक्त करतां येतें.

(२) कोज्या (क+ख+ग)

= कोज्या ($\overline{\text{क+ख}}$+ग)

= कोज्या (क+ख) कोज्या ग − ज्या (क+ख) ज्या ग

= (कोज्या क कोज्या ख − ज्या क ज्या ख) कोज्या ग
  − (ज्या क कोज्या ख + कोज्या क ज्या ख) ज्या ग

= कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग − कोज्या क ज्या ख ज्या ग
  − कोज्या ख ज्या ग ज्या क − कोज्या ग ज्या क ज्या ख

हें सूत्र,

कोज्या (क+ख+ग) = कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग ×
[१ − स्प ख स्प ग − स्प ग स्प क − स्प क स्प ख]
या रूपांतहि व्यक्त करतां येतें.

(३) स्प (क+ख+ग) = स्प ($\overline{\text{क+ख}}$+ग)

$$= \frac{\text{स्प (क+ख) + स्प ग}}{\text{१ − स्प (क+ख) स्पग}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{स्प क + स्प ख}}{\text{१ − स्प क स्प ख}} + \text{स्प ग}}{\text{१} - \dfrac{\text{स्प क + स्प ख}}{\text{१ − स्प क स्प ग}}.\text{स्प ग}}$$

$$= \frac{\text{स्प क + स्प ख + स्प ग − स्प क स्प ख स्प ग}}{\text{१ − स्प ख स्प ग − स्प ग स्प क − स्प क स्प ख}}$$

उपसाध्यः— क+ख+ग = १८०° असल्यास स्प (क+ख+ग) शून्य होतो. म्हणून स्प (क+ख+ग) च्या विस्तारामधील अंश शून्य होतो.

म्हणून $क + ख + ग = १८०^\circ$ असल्यास

$स्प\ क + स्प\ ख + स्प\ ग = स्प\ क\ स्प\ ख\ स्प\ ग$

९·२ क, ख, ग या तीन कोणांचा योग जेव्हां १८०° असतो तेव्हां त्यांच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्तींमध्ये अनेक ऐकात्म (identical) संबंध निर्माण होतात.

अशा ऐकात्म संबंधांच्या सिद्धतेची रीत खालील उदाहरणांवरून दिसून येईल.

उदाहरण १. क, ख, ग हे एकाद्या त्रिकोणाचे कोण असल्यास, ज्या क + ज्या ख + ज्या ग

$$= ४ कोज्या \frac{क}{२} कोज्या \frac{ख}{२} कोज्या \frac{ग}{२}$$

हें सिद्ध करा.

वामपक्ष = (ज्या क + ज्या ख) + ज्या ग

$$= २ज्या \frac{क+ख}{२} कोज्या \frac{क-ख}{२} + २ज्या \frac{ग}{२} कोज्या \frac{ग}{२}$$

आता क, ख, ग एका त्रिकोणाचे कोण आहेत.

$$\therefore क + ख + ग = १८०^\circ$$

$$\therefore \frac{क+ख}{२} = ९०^\circ - \frac{ग}{२}$$

$$म्हणून\ ज्या \frac{क+ख}{२} = कोज्या \frac{ग}{२}$$

$$व\ कोज्या \frac{क+ख}{२} = ज्या \frac{ग}{२}$$

$$\text{म्हणून वामपक्ष} = \text{२कोज्या}\,\frac{\text{ग}}{\text{२}}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{क}-\text{ख}}{\text{२}} + \text{२कोज्या}\,\frac{\text{क}+\text{ख}}{\text{२}}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{ग}}{\text{२}}$$

$$= \text{२कोज्या}\,\frac{\text{ग}}{\text{२}}\left(\text{कोज्या}\,\frac{\text{क}-\text{ख}}{\text{२}} + \text{कोज्या}\,\frac{\text{क}+\text{ख}}{\text{२}}\right)$$

$$= \text{२कोज्या}\,\frac{\text{ग}}{\text{२}}\cdot\left(\text{२कोज्या}\,\frac{\text{क}}{\text{२}}\cdot\text{कोज्या}\,\frac{\text{ख}}{\text{२}}\right)$$

$$= \text{४कोज्या}\,\frac{\text{क}}{\text{२}}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{ख}}{\text{२}}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{ग}}{\text{२}}$$

$$= \text{दक्षिणपक्ष}$$

उदाहरण २. जर $\text{क}+\text{ख}+\text{ग} = \text{१८०}^\circ$ असेल तर

$$\text{कोज्या२क} + \text{कोज्या २ख} + \text{कोज्या २ग} = -\text{१} - \text{४कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग}$$

हें सिद्ध करा.

$$\text{वामपक्ष} = (\text{कोज्या२क} + \text{कोज्या२ख}) + \text{कोज्या २ग}$$

$$= \text{२ कोज्या}\,(\text{क}+\text{ख})\,\text{कोज्या}\,(\text{क}-\text{ख}) + \text{२कोज्या}^{\text{२}}\text{ग} - \text{१}$$

पण $\text{क}+\text{ख} = \text{१८०}^\circ - \text{ग}$

$$\text{म्हणून कोज्या}\,(\text{क}+\text{ख}) = -\text{कोज्या ग}$$

म्हणून वामपक्ष

$$= -\text{२कोज्या ग कोज्या}\,(\text{क}-\text{ख}) + \text{२ कोज्या}^{\text{२}}\text{ग} - \text{१}$$

$$= \text{२कोज्या ग}\left\{-\text{कोज्या}(\text{क}-\text{ख}) + \text{कोज्या ग}\right\} - \text{१}$$

$$= २ \text{ कोज्या } ग \left\{ - \text{कोज्या } (क - ख) - \text{कोज्या } (क + ख) \right\} - १$$

$$= २ \text{ कोज्या } ग \,(- २ \text{कोज्या } क \text{ कोज्या } ख) - १$$

$$= - १ - ४ \text{कोज्या } क \text{ कोज्या } ख \text{ कोज्या } ग$$

उदाहरण २. जर $क + ख + ग = १८०^\circ$ असेल तर

$$\text{कोज्या}^२ क + \text{कोज्या}^२ ख - \text{कोज्या}^२ ग = १ - २\text{ज्या } क \text{ ज्या } ख \text{ कोज्या } ग$$

हे सिद्ध करा.

$$\text{वामपक्ष} = \frac{१}{२} (२ \text{ कोज्या}^२ क + २ \text{ कोज्या}^२ ख) - \text{कोज्या}^२ ग$$

$$= \frac{१}{२}(१ + \text{कोज्या } २ क) + \frac{१}{२}(१ + \text{कोज्या} २ ख) - \text{कोज्या}^२ ग$$

$$= १ + \frac{१}{२} (\text{कोज्या } २ क + \text{कोज्या } २ ख) - \text{कोज्या}^२ ग$$

$$= १ + \text{कोज्या } (क + ख) \text{ कोज्या } (क - ख) - \text{कोज्या } ग \text{ कोज्या } ग$$

पण $क + ख = १८०^\circ - ग$

$$\text{कोज्या } (क + ख) = - \text{कोज्या } ग$$

म्हणून $\text{वामपक्ष} = १ - \text{कोज्या } ग \text{ कोज्या } (क - ख) + \text{कोज्या } (क + ख) \text{ कोज्या } ग$

$$= १ - \text{कोज्या ग}\left\{\text{कोज्या }(\text{क}-\text{ख}) - \text{कोज्या }(\text{क}+\text{ख})\right\}$$

$$= १ - \text{कोज्या ग }(२ \text{ ज्या क ज्या ख})$$

$$= १ - २ \text{ ज्या क ज्या ख कोज्या ग}$$

उदाहरण ४. जर क + ख + ग = प्या असेल तर

$$\text{कोस्प}\frac{\text{क}}{२} + \text{कोस्प}\frac{\text{ख}}{२} + \text{कोस्प}\frac{\text{ग}}{२} = \text{कोस्प}\frac{\text{क}}{२}\ \text{कोस्प}\frac{\text{ख}}{२}\ \text{कोस्प}\frac{\text{ग}}{२}$$

हें सिद्ध करा.

आता क + ख + ग = प्या

$$\therefore \frac{\text{क}}{२} + \frac{\text{ख}}{२} + \frac{\text{ग}}{२} = \frac{\text{प्या}}{२}$$

$$\therefore \text{स्प}\left(\frac{\text{ख}}{२} + \frac{\text{ग}}{२}\right) = \text{स्प}\left(\frac{\text{प्या}}{२} - \frac{\text{क}}{२}\right)$$

$$\therefore \frac{\text{स्प}\frac{\text{ख}}{२} + \text{स्प}\frac{\text{ग}}{२}}{१ - \text{स्प}\frac{\text{ख}}{२}\ \text{स्प}\frac{\text{ग}}{२}} = \text{कोस्प}\frac{\text{क}}{२}$$

$$= \frac{१}{\text{स्प}\frac{\text{क}}{२}}$$

किंवा, $स्प \frac{क}{२} \left(स्प \frac{ख}{२} + स्प \frac{ग}{२} \right) = १ - स्प \frac{ख}{२} स्प \frac{ग}{२}$

किंवा, $स्प \frac{ख}{२}\ स्प \frac{ग}{२} + स्प \frac{ग}{२}\ स्प \frac{क}{२} + स्प \frac{क}{२}\ स्प \frac{ख}{२} = १$

$कोस्प \frac{क}{२}\ कोस्प \frac{ख}{२}\ कोस्प \frac{ग}{२}$ ने साधत गुणून,

$$कोस्प \frac{क}{२} + कोस्प \frac{ख}{२} + कोस्प \frac{ग}{२}$$

$$= कोस्प \frac{क}{२}\ कोस्प \frac{ख}{२}\ कोस्प \frac{ग}{२}$$

अन्यथाः—

$$स्प \left(\frac{क}{२} + \frac{ख}{२} + \frac{ग}{२} \right) = स्प \frac{प्या}{२}$$

$$\therefore \frac{स्प \frac{क}{२} + स्प \frac{ख}{२} + स्प \frac{ग}{२} - स्प \frac{क}{२}\ स्प \frac{ख}{२}\ स्प \frac{ग}{२}}{१ - स्प \frac{ख}{२}\ स्प \frac{ग}{२} - स्प \frac{ग}{२} स्प \frac{क}{२} - स्प \frac{क}{२} स्प \frac{ख}{२}} = \infty$$

म्हणून वामपक्षाचा हर शून्य असला पाहिजे.

$$\therefore\ १ - स्प \frac{ख}{२}\ स्प \frac{ग}{२} - स्प \frac{ग}{२}\ स्प \frac{क}{२} - स्प \frac{क}{२}\ स्प \frac{ख}{२} = ०$$

किंवा, $स्प \frac{ख}{२}\ स्प \frac{ग}{२} + स्प \frac{ग}{२} स्प \frac{क}{२} + स्प \frac{क}{२} स्प \frac{ख}{२} = १$

या समीकारास $कोस्प \frac{क}{२}\ कोस्प \frac{ख}{२}\ कोस्प \frac{ग}{२}$ ने सार्धत गुणिल्यास इष्ट फल मिळतें.

उदाहरणसंग्रह १३

(१) जर $क+ख+ग=१८०^\circ$ असेल तर सिद्ध करा की,
$ज्या२क+ज्या२ख+ज्या२ग=४ज्याक\,ज्याख\,ज्याग$
[बनारस १९४२

(२) $कोज्या\,क+कोज्या\,ख+कोज्या\,ग$
$$=१+४\ ज्या\frac{क}{२}\ ज्या\frac{ख}{२}\ ज्या\frac{ग}{२}$$

(३) $कोज्या\,क+कोज्या\,ख-कोज्या\,ग$
$$=-१+४\ कोज्या\frac{क}{२}\ कोज्या\frac{ख}{२}\ ज्या\frac{ग}{२}$$

(४) $कोज्या^२क+कोज्या^२ख+कोज्या^२ग$
$=१-२कोज्या\,क\ कोज्या\,ख\ कोज्या\,ग$
[नागपूर १९४०

(५) $ज्या^२क+ज्या^२ख+ज्या^२ग$
$=२+२कोज्या\,क\ कोज्या\,ख\ कोज्या\,ग$
[बनारस १९४०

(६) $ज्या^२क+ज्या^२ख-ज्या^२ग=२ज्याक\,ज्याख\,कोज्या\,ग$
[बनारस १९४३

(७) $ज्या^२\frac{क}{२}+ज्या^२\frac{ख}{२}+ज्या^२\frac{ग}{२}$
$$=१-२ज्या\frac{क}{२}ज्या\frac{ख}{२}\ ज्या\frac{ग}{२}$$
[पाटणा १९४२

(८) $\text{ज्या}^{२}\frac{\text{क}}{२}+\text{ज्या}^{२}\frac{\text{ख}}{२}-\text{ज्या}^{२}\frac{\text{ग}}{२}$

$$=१-२\text{कोज्या}\ \frac{\text{क}}{२}\ \text{कोज्या}\frac{\text{ख}}{२}\ \text{ज्या}\ \frac{\text{ग}}{२}$$

[नागपूर १९४४

(९) $\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२}+\text{कोज्या}\frac{\text{ख}}{२}+\text{कोज्या}\frac{\text{ग}}{२}$

$$=४\text{कोज्या}\ \frac{\text{ख}+\text{ग}}{४}\text{कोज्या}\frac{\text{ग}+\text{क}}{४}\text{कोज्या}\frac{\text{क}+\text{ख}}{४}$$

[अलाहाबाद १९३९

(१०) $\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२}+\text{कोज्या}\frac{\text{ख}}{२}-\text{कोज्या}\frac{\text{ग}}{२}$

$$=४\text{कोज्या}\ \frac{\pi+\text{क}}{४}\ \text{कोज्या}\frac{\pi+\text{ख}}{४}\text{कोज्या}\ \frac{\pi-\text{ग}}{४}$$

[पटना १९४२

(११) $\text{ज्या}\frac{\text{क}}{२}+\text{ज्या}\ \frac{\text{ख}}{२}+\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२}-१$

$$=४\text{ज्या}\frac{\pi-\text{क}}{४}\text{ज्या}\frac{\pi-\text{ख}}{४}\text{ज्या}\ \frac{\pi-\text{ग}}{४}$$

[पटना १९४१

(१२) $\text{ज्या}\ (\text{ख}+\text{ग}-\text{क})+\text{ज्या}\ (\text{ग}+\text{क}-\text{ख})$

$$+\text{ज्या}\ (\text{क}+\text{ख}-\text{ग})=४\text{ज्या}\ \text{क}\ \text{ज्या}\ \text{ख}\ \text{ज्या}\ \text{ग}$$

[अलाहाबाद १९४०

(१३) $\frac{\text{कोज्या (ख − ग)}}{\text{ज्या ख ज्या ग}} + \frac{\text{कोज्या (ग − क)}}{\text{ज्या ग ज्या क}} + \frac{\text{कोज्या (क − ख)}}{\text{ज्या क ज्या ख}} = ४$

[नागपूर १९४३

(१४) कोस्प ख कोस्प ग + कोस्प ग कोस्प क + कोस्प क कोस्प ख = १

(१५) जर क + ख + ग = $\frac{\text{प्या}}{२}$ असेल तर सिद्ध करा की

(१) कोस्प क + कोस्प ख + कोस्प ग = कोस्प क कोस्प ख कोस्प ग

(२) ज्या^{२}क + ज्या^{२}ख + ज्या^{२}ग + २ज्याक ज्या ख ज्याग = १

[कलकत्ता १९४२

(३) $\frac{\text{ज्या२क + ज्या२ख + ज्या२ग}}{\text{ज्या२क − ज्या२ख + ज्या२ग}}$ = कोस्प क कोस्प ग

(१६) जर इ + ई = उ असेल तर
कोज्या^{२}इ + कोज्या^{२}ई − २कोज्या इ कोज्या ई कोज्या उ = ज्या^{२}उ हें सिद्ध करा.

[पाटणा १९२६

(१७) जर क + ख + ग = ० असेल तर
स्प क + स्प ख + स्प ग = स्प क स्प ख स्प ग
हें दाखवा. यावरून
$\sqrt{३}$ + स्प ४०° + स्प ८०° = $\sqrt{३}$स्प ४०° स्प ८०°
हें दाखवा.

[बनारस १९२५

(१८) जर क+ख+ग = २ह असेल तर सिद्ध करा की

ज्या (ह − क). ज्या (ह − ख) + ज्या (ह − ग). ज्या ह

= ज्या क ज्या ख

[पाटणा १९३२

(१९) जर य + र + ल = यरल असेल तर

य (१ − र^{२}) (१ − ल^{२}) + र (१ − ल^{२}) (१ − य^{२})

+ ल (१ − य^{२}) (१ − र^{२}) = ४यरल

हें सिद्ध करा.

(२०) जर क + ख + ग = प्या असेल तर

ज्या^{२}क	कोस्प क	१
ज्या^{२}ख	कोस्प ख	१
ज्या^{२}ग	कोस्प ग	१

= ०

हें सिद्ध करा.

[कलकत्ता बी. एस्सी. १९३१

९·३ ग < √(क^{२} + ख^{२}) असल्यास

क कोज्या अ + ख ज्या अ = ग

अशा रूपाचा त्रिकोणमितीय समीकार सोडविणें.

रीत १:— त्यांत प्र धन, आणि इ चें मान अल्पिष्ट पण धन आहे असे

क = प्र कोज्या इ,

ख = प्र ज्या इ

हे आदेश घ्या.

यावरून $\text{त्र} = \sqrt{\text{क}^2 + \text{ख}^2}$

$$\text{ज्या}\ \text{इ} = \frac{\text{ख}}{\sqrt{\text{क}^2 + \text{ख}^2}}$$

$$\text{आणि कोज्या}\ \text{इ} = \frac{\text{क}}{\sqrt{\text{क}^2 + \text{ख}^2}}$$

क आणि ख दिलेले असल्यामुळे त्यांची चिन्हें इ चा चरण निश्चित करतात. नंतर वरील संबंधांच्या साह्याने त्र आणि इ चें मान ठरवितां येतें.

वरील आदेशांचा उपयोग केल्यावर दिलेल्या समीकाराचें

$$\text{त्र कोज्या}\ (\text{अ} - \text{इ}) = \text{ग}$$

या समीकारांत रूपांतर होतें.

$$\text{आता, कोज्या}\ (\text{अ} - \text{इ}) = \frac{\text{ग}}{\text{त्र}}$$

$$= \frac{\text{ग}}{\sqrt{\text{क}^2 + \text{ख}^2}}$$

या समीकाराचा दक्षिणपक्ष, $\text{ग} < \sqrt{\text{क}^2 + \text{ख}^2}$ असल्यामुळे, संख्येने एकापेक्षा लहान आहे. म्हणून $\frac{\text{ग}}{\sqrt{\text{क}^2 + \text{ख}^2}}$ समान कोटिज्या असणारा ई ने निर्दिष्ट केलेला अल्पिष्ठ धन कोण, क, ख, ग माहीत असल्यामुळे निश्चित करतां येऊन वरील समीकार

$$\text{कोज्या}\ (\text{अ} - \text{इ}) = \text{कोज्या}\ \text{ई}$$

असा लिहितां येतो.

म्हणून स शून्य किंवा कोणतादि धन वा ऋण पूर्णांक असल्यास

$$अ - ε = २ \text{ स } π \pm ε$$

किंवा $अ = २ \text{ स } π + ε \pm ε$

रीत २ :— दिलेला समीकार $स्प \frac{अ}{२} = प$ हा आदेश करून सोडवितां येतो.

आतां, अनुच्छेद ८·१ धरून,

$$ज्या\ अ = \frac{२ \text{ स्प} \frac{अ}{२}}{१ + स्प^{२} \frac{अ}{२}} = \frac{२}{१ + प^{२}} \text{ (आदेशाने)}$$

$$व\ कोज्या\ अ = \frac{१ - स्प^{२} \frac{अ}{२}}{१ + स्प^{२} \frac{अ}{२}} = \frac{१ - प^{२}}{१ + प^{२}}$$

म्हणून दिलेल्या समीकाराचें रूपांतर

$$क \frac{१ - प^{२}}{१ + प^{२}} + ख \frac{२ प}{१ + प^{२}} = ग$$

किंवा $प^{२} (ग + क) - २ ख प + (ग - क) = ०$

हा प चा वर्ग (quadratic) समीकार आहे, व त्यापासून प च्या दोन किंमती (समजा $प_{१}$ व $प_{२}$) मिळतात.

पण $प = अ \text{ स्प} \frac{अ}{२}$

$\therefore$ स्प $\frac{अ}{२}$ = प, किंवा प,

या समीकाराचें समाधान करणाऱ्या अ च्या ई, व ई, या अल्पिष्ठ धन अर्हा आहेत असें समजा.

$\therefore$ स्प $\frac{अ}{२}$ = स्प ई, किंवा स्प ई,

म्हणून स कोणताहि पूर्णांक असल्यास,

$\frac{अ}{२}$ = स प्या + ई, किंवा स प्या + ई,

अर्थात् अ = २स प्या + २ई, किंवा २स प्या + २ई,

उदाहरण. ज्या अ + √३ कोज्या अ = √२

हा समीकार सोडवा. [कलकत्ता १९३८

समीकाराच्या दोन्ही पक्षांस $\sqrt{१+३}$ म्हणजे २ नें भागून,

$$\frac{\sqrt{३}}{२} कोज्या अ + \frac{१}{२} ज्या अ = \frac{१}{\sqrt{२}}$$

पण $\frac{\sqrt{३}}{२}$ = कोज्या $\frac{प्या}{६}$,

$\frac{१}{२}$ = ज्या $\frac{प्या}{६}$,

व $\frac{१}{\sqrt{२}}$ = कोज्या $\frac{प्या}{४}$

म्हणून कोज्या अ कोज्या $\frac{\text{प्या}}{६}$ + ज्या अ ज्या $\frac{\text{प्या}}{६} = \frac{१}{\sqrt{२}}$

किंवा कोज्या $\left(\text{अ} - \frac{\text{प्या}}{६}\right)$ = कोज्या $\frac{\text{प्या}}{४}$

म्हणून $\text{अ} - \frac{\text{प्या}}{६} = \text{२स प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{४}$

किंवा $\text{अ} = \text{२स प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{४} + \frac{\text{प्या}}{६}$

किंवा $\text{अ} = \text{२स प्या} + \frac{\text{५प्या}}{१२}$ किंवा $\text{२स प्या} - \frac{\text{प्या}}{१२}$

या समीकारावरून अ चा सामान्य अर्थ मिळते.

९·४ कांही प्रकारचे त्रिकोणमितीय समीकार, योग आणि वियोग प्रमेयांचा उपयोग करून सोडवितां येतात.

उदाहरण. ज्या य + ज्या २ य + ज्या ३ य = ० हा समीकार सोडवा.

आता ज्या य + ज्या ३ य = − ज्या २ य

म्हणून ७·७ या अनुच्छेदानें,

२ ज्या २ य कोज्या य = − ज्या २ य

∴ ज्या२य = ० किंवा २ कोज्या य = −१

जर ज्या२य = ०, तर २य = स प्या

आता $-\frac{१}{२}$ ही कोटिज्या असलेला $\frac{\text{२प्या}}{३}$ हा अल्पिष्ठ धन कोण आहे.

म्हणून, जर कोज्या $य = -\frac{१}{२}$

$$\text{तर } य = २ \text{ स प्या} \pm \frac{२ \text{ प्या}}{३}$$

$$\therefore \quad य = \frac{\text{स प्या}}{२} \text{ किंवा } २ \text{ स प्या} \pm \frac{२ \text{ प्या}}{३}$$

उदाहरणसंग्रह १४

पुढील समीकार सोडवा—

(१) ज्या अ + कोज्या अ = १ [मुंबई १९२८

(२) ज्या अ + $\sqrt{३}$ कोज्या अ = १ [आंध्र १९४२

(३) ३ ज्या य + ४ कोज्या य = $२\frac{१}{२}$ [आंध्र १९३३

(स्प ३६°५२′ = $\frac{३}{४}$ दिलेलो आहे.)

(४) व्युत्कोज्या अ − १ = ($\sqrt{२}$ − १) स्प अ [नागपूर १९४१

(५) व्युज्ज्या अ = कोस्प अ + $\sqrt{३}$ [नागपूर १९४६

(६) क कोज्या अ + ख ज्या अ = ग या समीकाराचें समाधान करणाऱ्या इ व ई या अ च्या भिन्न अहीं असल्यास ज्या (इ + ई) = $\frac{२ \text{ क ख}}{\text{क}^२ + \text{ख}^२}$ हें सिद्ध करा.

[नागपूर १९२५

पुढील समीकार सोडवा—

(७) कोज्या य + कोज्या ३ य + कोज्या ५य = ०

[बनारस १९३०

(८) कोज्या अ + ज्या २ अ − कोज्या३अ = ० [पाटणा १९३६

(९) कोज्या ३अ + २ कोज्या अ = ० [नागपूर १९२५

(१०) १ + ज्या²अ = ३ज्या अ कोज्या अ [नागपूर १९४४

(११) व्युत्कोज्या² $\frac{\text{य}}{२}$ + व्युज्ज्या² $\frac{\text{य}}{२}$ = १६ कोस्प य

[नागपूर १९४१

(१२) स्प अ + व्युत्कोज्या २अ = १ [नागपूर १९४०

(१३) कोज्या ३य + ज्या२य = ० [नागपूर १९४२

(१४) कोज्या ३अ कोज्या २अ = कोज्या अ [नागपूर १९४३

(१५) कोज्या अ + कोज्या २ अ + कोज्या ३ अ = ०

(१६) स्प अ + स्प २ अ + स्प ३ अ = ०

(१७) कोज्या २ य − ज्या २ य = कोज्या य − ज्या य − १

[बनारस १९३८

(१८) कोज्या ३ अ − कोज्या ५ अ = ज्या अ

[बनारस १९३९

प्रकरण दहावें

त्रिकोणाच्या भुजा व कोण यांमधील संबंध

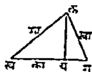
१०·१ आता आपण कोणत्याहि त्रिकोणाच्या बाजू व त्याच्या कोणांच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती यांमधील कांहीं संबंध प्रस्थापित करूं. त्रिकोणाचे कोण क, ख, ग या अक्षरांनी व त्यांच्या समोरील बाजू अनुक्रमें का, खा, गा या अक्षरांनी दर्शविल्या जातात.

१०·२ ज्या-नियम (law of the sines).

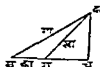
कोणत्याहि त्रिकोणांतील कोणांच्या ज्या त्यांच्यासमोरील बाजूंशीं अनुपाती असतात.

अर्थात् कखग या कोणत्याहि त्रिकोणांत,

$$\frac{\text{ज्या क}}{\text{का}} = \frac{\text{ज्या ख}}{\text{खा}} = \frac{\text{ज्या ग}}{\text{गा}}$$



आकृति (अ)



आकृति (आ)



आकृति (इ)

आ. १०.१

कखग हा कोणताहि त्रिकोण घेऊन क पासून खग वर कच हा लम्ब काढा. आकृत्यांत दाखविल्याप्रमाणे, ग न्यूनकोण, अधिक (obtuse) कोण किंवा लंबकोण असेल तदनुसार च हा बिंदु खग रेषेच्या आंत, बाहेर किंवा टोकापाशीं राहील.

आता, सर्व आकृत्यांत कच खग ला लंब आहे.

$\therefore \quad \frac{\text{कच}}{\text{कख}} = \text{ज्या ख},$

किंवा कच = गा ज्या ख,............................ (१)

पुन्हा, आकृति (अ) मधे

$\frac{\text{कच}}{\text{कग}} = \text{ज्या ग},$

किंवा कच = खा ज्या ग

आकृति (आ) मधे

$\frac{\text{कच}}{\text{कग}} = \text{ज्या कगच}$

$= \text{ज्या } (१८०^\circ - \text{ग}) = \text{ज्या ग}$

किंवा कच = खा ज्या ग

आकृति (इ) मधे कच = कग = खा

पण या आकृतींत ग = ९०° असल्यामुळे ज्या ग = १

म्हणून या प्रकारांतहि

कच = खा ज्या ग

म्हणून सर्व आकृत्यांत,

$कच = खा ज्या ग$ ....(२)

(१) व (२) वरून,

$गा ज्या ख = खा ज्या ग$

$$\therefore \quad \frac{ज्या ख}{खा} = \frac{ज्या ग}{गा}$$

तसेच, $\frac{ज्या क}{का} = \frac{ज्या ख}{खा}$ हें सिद्ध करतां येईल.

$$\therefore \quad \frac{ज्या क}{का} = \frac{ज्या ख}{खा} = \frac{ज्या ग}{गा}$$

१०·२१ कोटिज्या – नियम.

कखग या कोणत्याहि त्रिकोणांत,

$$कोज्या क = \frac{खा^2 + गा^2 - का^2}{२खा गा}$$

$$कोज्या ख = \frac{गा^2 + का^2 - खा^2}{२ गा का}$$

$$कोज्या ग = \frac{का^2 + खा^2 - गा^2}{२का खा}$$

हें सिद्ध करतांना आपण वरील अनुच्छेदांतील आकृत्यांचा उपयोग करूं.

आकृति (अ) मधे, ग न्यूनकोण असतांना,

$$कख^2 = खग^2 + कग^2 - २खग \cdot गच$$

$$= खग^2 + कग^2 - २खग \cdot कग \text{ कोज्या } ग$$

किंवा, $गा^2 = का^2 + खा^2 - २का \cdot खा$ कोज्या ग

आकृति (आ) मधे, जेव्हा ग अधिककोण असतो
तेव्हा, $कख^2 = खग^2 + कग^2 + 2 खग \cdot गच$

$$= खग^2 + कग^2 + 2 खग \cdot कग \text{ कोज्या } (१८०^\circ - ग)$$

$$= खग^2 + कग^2 - 2 खग \cdot कग \text{ कोज्या } ग$$

किंवा, $गा^2 = का^2 + खा^2 - 2 का\, खा \text{ कोज्या } ग$
हें फल मागील फलासमान आहे.

आकृति (इ) मधे, ग लंबकोण असतांना,

$$कख^2 = खग^2 + कग^2$$

किंवा, $गा^2 = का^2 + खा^2$

पण $ग = ९०^\circ$, व कोज्या $ग = ०$ आहे. म्हणून हा संबंध सुद्धा

$$गा^2 = का^2 + खा^2 - का\, खा \text{ कोज्या } ग$$

या रूपांत लिहितां येतो. म्हणून तो सर्व त्रिकोणांकरितां सत्य आहे.

याचप्रमाणे, $का^2 = खा^2 + गा^2 - 2 खा\, गा \text{ कोज्या } क$,

$$खा^2 = गा^2 + का^2 - 2 गा\, का \text{ कोज्या } ख$$

हे संबंध सिद्ध करतां येतात.

वरील संबंधांवरून,

$$\text{कोज्या } क = \frac{खा^2 + गा^2 - का^2}{2 खा\, गा}$$

$$\text{कोज्या } ख = \frac{गा^2 + का^2 - खा^2}{2 गा\, का}$$

$$\text{कोज्या } ग = \frac{का^2 + खा^2 - गा^2}{2 का\, खा}$$

पुन्हा $१ - कोज्या\ क = २ ज्या^२ \frac{क}{२}$

म्हणून संबंध ( ) पुढीलप्रमाणे लिहितां येतो.

$$२\ ज्या^२ \frac{क}{२} = \frac{२ (मा - खा)\ २ (मा - गा)}{२\ खा\ गा}$$

$$किंवा\ ज्या^२ \frac{क}{२} = \frac{(मा - खा)\ (मा - गा)}{खा\ गा}$$

$$ज्या \frac{क}{२} = \pm \sqrt{\frac{(मा - खा)\ मा - गा)}{खा\ गा}}$$

आता, कोणत्याहि त्रिकोणांत,

$$क < १८०^\circ$$

$$\therefore \frac{क}{२} < ९०^\circ$$

म्हणून ज्या $\frac{क}{२}$, कोज्या $\frac{क}{२}$, स्प $\frac{क}{२}$ नेहमी धन असतात. म्हणून ज्या $\frac{क}{२}$ च्या वरील सूत्रांतील, तसेंच पुढे काढण्यांत येणाऱ्या कोज्या $\frac{क}{२}$ आणि स्प $\frac{क}{२}$ याच्या सूत्रातील वर्गमूळाचीं चिन्हें धन घ्यावीं लागतील.

$$ज्या \frac{क}{२} = \sqrt{\frac{(मा - खा)\ (मा - गा)}{खा\ गा}}$$

तसेंच, $\text{ज्या}\ \frac{\text{ख}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{सा}-\text{गा})\ (\text{सा}-\text{का})}{\text{गा}\ \text{का}}}$

$\text{ज्या}\ \frac{\text{ग}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{सा}-\text{का})\ (\text{सा}-\text{खा})}{\text{का}\ \text{खा}}}$

पुन्हा, $१+\text{कोज्या}\ \text{क} = १ + \frac{\text{खा}^{२} + \text{गा}^{२} - \text{का}^{२}}{२\ \text{खा}\ \text{गा}}$

$= \frac{(\text{खा}^{२} + \text{गा}^{२} + २\ \text{खा}\ \text{गा}) - \text{का}^{२}}{२\ \text{खा}\ \text{गा}}$

$= \frac{(\text{खा} + \text{गा})^{२} - \text{का}^{२}}{२\ \text{खा}\ \text{गा}}$

$= \frac{(\text{खा} + \text{गा} + \text{का})\ (\text{खा} + \text{गा} - \text{का})}{२\ \text{खा}\ \text{गा}}$

परंतु, $(\text{खा}+\text{गा}-\text{का}) = (\text{का} + \text{खा} + \text{गा}) - २\ \text{का}$

$= २\ \text{सा} - २\ \text{का} = २\ (\text{सा} - \text{का})$

आणि $१+\text{कोज्या}\ \text{क} = २\ \text{कोज्या}^{२} \frac{\text{क}}{२}$.

म्हणून वरील समीकरणाचें रूपांतर

$२\text{कोज्या}^{२} \frac{\text{क}}{२} = \frac{२\ \text{सा}.२\ (\text{सा} - \text{का})}{२\ \text{खा}\ \text{गा}}$

किंवा $\text{कोज्या}^{२} \frac{\text{क}}{२} = \frac{\text{सा}\ (\text{सा} - \text{का})}{\text{खा}\ \text{गा}}$

$\therefore\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{क}}{२} = \sqrt{\frac{\text{सा}\ (\text{सा} - \text{का})}{\text{खा}\ \text{गा}}}$

तसेंच, $\text{कोज्या}\ \frac{\text{ख}}{२} = \sqrt{\frac{\text{सा}\ (\text{सा} - \text{खा})}{\text{गा}\ \text{का}}}$

व $\text{कोज्या}\ \frac{\text{ग}}{२} = \sqrt{\frac{\text{सा}\ (\text{सा} - \text{गा})}{\text{का}\ \text{खा}}}$

आता $\text{स्प}\ \frac{\text{क}}{२} = \frac{\text{ज्या}\ \frac{\text{क}}{२}}{\text{कोज्या}\ \frac{\text{क}}{२}}$

म्हणून वरील फलांनुसार

$$\text{स्प}\ \frac{\text{क}}{२} = \frac{\sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{खा})\ (\text{सा} - \text{गा})}{\text{खगा}}}}{\sqrt{\frac{\text{सा}\ (\text{सा} - \text{का})}{\text{खा}\ \text{गा}}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{खा})\ (\text{सा} - \text{गा})}{\text{सा}\ (\text{सा} - \text{का})}}$$

तसेंच, $\text{स्प}\ \frac{\text{ख}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{गा}\ (\text{सा} - \text{का})}{\text{सा}\ (\text{सा} - \text{खा})}}$

व $\text{स्प}\ \frac{\text{ग}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{का})(\text{सा} - \text{खा})}{\text{सा}\ (\text{सा} - \text{गा})}}$

१०.५ त्रिकोणाच्या भुजांच्या रूपांत त्याच्या कोणत्याहि कोणाची ज्या व्यक्त करणें.

आतां, $\text{ज्या}\ \text{क} = २\ \text{ज्या}\ \frac{\text{क}}{२}\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{क}}{२}$

$$= २\sqrt{\frac{(सा - खा)\,(सा - गा)}{खा\,गा}} \times$$

$$\sqrt{\frac{सा\,(सा - का)}{खा\,गा}}$$

[१०.४ अनुच्छेदाने

$$= \frac{२}{खा\,गा}\sqrt{सा(सा - का)\,(सा - खा)\,(सा - गा)}$$

$$\text{तसेच, ज्या ख} = \frac{२}{गा\,का}\sqrt{सा(सा - का)\,(सा - खा)\,(सा - गा)}$$

$$\text{व ज्या ग} = \frac{२}{का\,खा}\sqrt{सा(सा - का)\,(सा - खा)\,(सा - गा)}$$

१०.६ कखग या कोणत्याहि त्रिकोणांत,

$$\text{स्प}\left(\frac{ख - ग}{२}\right) = \left(\frac{खा - गा}{खा + गा}\right)\text{कोस्प}\,\frac{क}{२}$$

आता, $\text{स्प}\left(\frac{ख - ग}{२}\right)\text{स्प}\,\frac{क}{२}$

$$= \frac{\text{स्प}\frac{ख}{२}\text{स्प}\frac{क}{२} - \text{स्प}\frac{ग}{२}\text{स्प}\frac{क}{२}}{१ + \text{स्प}\frac{ख}{२}\text{स्प}\frac{ग}{२}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{(सा-गा)(सा-का)}{सा(सा-खा)}}\sqrt{\frac{(सा-खा)(सा-गा)}{सा(सा-का)}}}{१+\sqrt{\frac{(सा-गा)(सा-का)}{सा(सा-खा)}}\sqrt{\frac{(सा-का)(सा-खा)}{सा(सा-गा)}}}$$

$$-\frac{\sqrt{\frac{(सा-का)(सा-खा)}{सा(सा-गा)}}\sqrt{\frac{(सा-खा)(सा-गा)}{सा(सा-का)}}}{१+\sqrt{\frac{(सा-गा)(सा-का)}{सा(सा-खा)}}\sqrt{\frac{(सा-का)(सा-खा)}{सा(सा-गा)}}}$$

$$= \frac{\frac{सा-गा}{सा}-\frac{सा-खा}{सा}}{१+\frac{सा-का}{सा}}$$

$$= \frac{(सा-गा)-(सा-खा)}{२सा-का} = \frac{खा-गा}{खा+गा}$$

$$\therefore\ स्प\left(\frac{ख-ग}{२}\right)=\left(\frac{खा-गा}{खा+गा}\right)कोस्प\frac{क}{२}$$

तसेंच, $स्प\left(\frac{ग-क}{२}\right)=\left(\frac{गा-का}{गा+का}\right)कोस्प\frac{ख}{२}$

व $स्प\left(\frac{क-ख}{२}\right)=\left(\frac{का-खा}{का+खा}\right)कोस्प\frac{ग}{२}$

अभ्यासः— $\left(\frac{खा-गा}{खा+गा}\right)$ चें कोणांच्या निष्पत्तींच्या रूपांत परिवर्तन करून

$$\text{स्प}\left(\frac{\text{ख}-\text{ग}}{२}\right)=\left(\frac{\text{खा}-\text{गा}}{\text{खा}+\text{गा}}\right)\text{कोस्प}\frac{\text{क}}{२}$$

हा संबंध सिद्ध करा.

१०·७ त्रिकोणाच्या भुजा व कोण यांनी युक्त असलेलीं अनेक ऐकात्म्यें आहेत. तीं, एकतर भुजांच्या जागीं संवादी कोणांच्या निष्पत्तींचे आदेश करून किंवा कोणांच्या निष्पत्तींच्या जागीं संवादी भुजांचे आदेश करून सिद्ध करतां येतात.

उदाहरण १. कखग या कोणत्याहि त्रिकोणांत,

$$\text{खा}^{२}\text{ज्या } २\text{ग}+\text{गा}^{२}\text{ज्या } २\text{ख}=२\text{ खा गा ज्या क}$$

हें सिद्ध करा.

$$\text{समजा}\quad \frac{\text{ज्या क}}{\text{का}}=\frac{\text{ज्या ख}}{\text{खा}}=\frac{\text{ज्या ग}}{\text{गा}}=\text{न}$$

$\therefore$ ज्या क $=$ का न, ज्या ख $=$ खा न, ज्या ग $=$ गा न

$\therefore$ वामपक्ष $= २$ खा^{२}ज्या ग कोज्या ग

$+ २$ गा^{२}ज्या ख कोज्या ख

$= २$ खा^{२}. गा न. कोज्या ग

$+ २$ गा^{२}. खा न. कोज्या ख

$= २$ खा गा न (खा कोज्या ग $+$ गा कोज्या ख)

$= २$ खा गा न. का

(१०·३ अनुच्छेदानें)

$= २$ खा गा (का. न) $= २$ खा गा ज्या क

$=$ दक्षिण पक्ष

उदाहरण २. कखग या कोणत्याहि त्रिकोणांत

$$(\text{खा}+\text{गा}-\text{का})\left(\text{कोस्प}\,\frac{\text{ख}}{२}+\text{कोस्प}\,\frac{\text{ग}}{२}\right)=२\,\text{का}\,\text{कोस्प}\,\frac{\text{क}}{२}$$

हें सिद्ध करा.

आता, $$\text{कोस्प}\,\frac{\text{ख}}{२}=\frac{१}{\text{स्प}\,\frac{\text{ख}}{२}}=\sqrt{\frac{\text{सा}\,(\text{सा}-\text{खा})}{(\text{सा}-\text{गा})\,(\text{सा}-\text{का})}}$$

व $$\text{कोस्प}\,\frac{\text{ग}}{२}=\frac{१}{\text{स्प}\,\frac{\text{ग}}{२}}=\sqrt{\frac{\text{सा}\,(\text{सा}-\text{गा})}{(\text{सा}-\text{का})\,(\text{सा}-\text{खा})}}$$

(१०·४ अनुच्छेदाने)

शिवाय, $$\text{खा}+\text{गा}-\text{का}=(\text{का}+\text{खा}+\text{गा})-२\,\text{का}=२\,\text{सा}-२\text{का}=२\,(\text{सा}-\text{का})$$

$$\therefore\ \text{डावा पक्ष}=२\,(\text{सा}-\text{का})\left(\sqrt{\frac{\text{सा}\,(\text{सा}-\text{खा})}{(\text{सा}-\text{गा})(\text{सा}-\text{का})}}+\sqrt{\frac{\text{सा}\,(\text{सा}-\text{गा})}{(\text{सा}-\text{का})\,(\text{सा}-\text{खा})}}\right)$$

$$=२\,(\text{सा}-\text{का})\sqrt{\frac{\text{सा}}{(\text{सा}-\text{का})}}\times\left(\sqrt{\frac{(\text{सा}-\text{खा})}{(\text{सा}-\text{गा})}}+\sqrt{\frac{(\text{सा}-\text{गा})}{(\text{सा}-\text{खा})}}\right)$$

$$= 2\sqrt{सा(सा-का)} \times \frac{(सा-खा)+(सा-गा)}{\sqrt{(सा-खा)(सा-गा)}}$$

$$= 2\sqrt{सा(सा-का)} \times \frac{का}{\sqrt{(सा-खा)(सा-गा)}}$$

$$= 2का\ कोस्प\frac{क}{2}$$

अन्यथा— भुजांच्या जागीं आदेश करूनहि वरील ऐकात्म्य सिद्ध करतां येतें.

१०·२ या अनुच्छेदावरून

$$\frac{खा+गा-का}{2का} = \frac{ज्या\,ख + ज्या\,ग - ज्या\,क}{2ज्या\,क}$$

$$= \frac{2ज्या\frac{ख+ग}{2}कोज्या\frac{ख-ग}{2} - 2\,ज्या\frac{क}{2}कोज्या\frac{क}{2}}{2ज्या\,क}$$

पण $\frac{ख+ग}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{क}{2}$

$\therefore$ ज्या $\frac{ख+ग}{2} =$ कोज्या$\frac{क}{2}$

व ज्या$\frac{क}{2} =$ कोज्या$\frac{ख+ग}{2}$

$$\therefore \frac{\text{खा}+\text{गा}-\text{का}}{\text{२का}}$$

$$=\frac{\text{२कोज्या}\frac{\text{क}}{\text{२}}\text{कोज्या}\frac{\text{ख}-\text{ग}}{\text{२}}-\text{२कोज्या}\frac{\text{ख}+\text{ग}}{\text{२}}\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{\text{२}}}{\text{२ज्या क}}$$

$$=\frac{\text{२कोज्या}\frac{\text{क}}{\text{२}}\left(\text{कोज्या}\frac{\text{ख}-\text{ग}}{\text{२}}-\text{कोज्या}\frac{\text{ख}+\text{ग}}{\text{२}}\right)}{\text{४ज्या}\frac{\text{क}}{\text{२}}\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{\text{२}}}$$

$$=\frac{\text{२कोज्या}\frac{\text{क}}{\text{२}}\cdot\text{२ज्या}\frac{\text{ख}}{\text{२}}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{\text{२}}}{\text{४ज्या}\frac{\text{क}}{\text{२}}\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{\text{२}}}$$

$$=\frac{\text{ज्या}\frac{\text{ख}}{\text{२}}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{\text{२}}}{\text{ज्या}\frac{\text{क}}{\text{२}}}$$

दिखाय, $\dfrac{\text{कोस्प}\frac{\text{क}}{\text{२}}}{\text{कोस्प}\frac{\text{ख}}{\text{२}}+\text{कोस्प}\frac{\text{ग}}{\text{२}}}$

$$= \frac{\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२}\ \text{ज्या}\frac{\text{ख}}{२}\ \text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२}}{\text{ज्या}\frac{\text{क}}{२}\left(\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२}\ \text{कोज्या}\frac{\text{ख}}{२}+\text{कोज्या}\frac{\text{ग}}{२}\text{ज्या}\frac{\text{ख}}{२}\right)}$$

$$= \frac{\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२}\ \text{ज्या}\frac{\text{ख}}{२}\ \text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२}}{\text{ज्या}\frac{\text{क}}{२}\ \text{ज्या}\frac{\text{ख}+\text{ग}}{२}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२}\text{ज्या}\frac{\text{ख}}{२}\ \text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२}}{\text{ज्या}\frac{\text{क}}{२}\text{कोज्या}\ \frac{\text{क}}{२}}$$

$$= \frac{\text{ज्या}\frac{\text{ख}}{२}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२}}{\text{ज्या}\frac{\text{क}}{२}}$$

$$\therefore \frac{\text{खा}+\text{गा}-\text{का}}{२\ \text{का}} = \frac{\text{कोस्प}\ \frac{\text{क}}{२}}{\text{कोस्प}\frac{\text{ख}}{२}+\text{कोस्प}\ \frac{\text{ग}}{२}}$$

किंवा $(\text{खा}+\text{गा}-\text{का})\left(\text{कोस्प}\frac{\text{ख}}{२}+\text{कोस्प}\frac{\text{ग}}{२}\right)$

$$= २\ \text{का}\ \text{कोस्प}\ \frac{\text{क}}{२}$$

उदाहरण ३. कखग त्रिकोणांत $का^2$, $खा^2$, $गा^2$ समान्तर श्रेढींत असल्यास कोस्प क, कोस्प ख व कोस्प ग सुद्धा समांतर श्रेढींत असतात हें सिद्ध करा.

आपणास

कोस्प ख − कोस्प क = कोस्प ग − कोस्प ख

किंवा कोस्प क + कोस्प ग = २कोस्प ख हें सिद्ध करावयाचें आहे.

हें सत्य असण्याकरितां

$$\frac{\text{कोज्या क}}{\text{ज्या क}} + \frac{\text{कोज्या ग}}{\text{ज्या ग}} = \frac{\text{२कोज्या ख}}{\text{ज्या ख}}$$

$$\text{किंवा } \frac{\text{कोज्या क}}{\text{का}} + \frac{\text{कोज्या ग}}{\text{गा}} = \frac{\text{२कोज्या ख}}{\text{खा}}$$

(१०·२ अनुच्छेदानें)

$$\text{किंवा } \frac{\text{गा कोज्या क} + \text{का कोज्या ग}}{\text{का गा}} = \frac{\text{२कोज्या ख}}{\text{खा}}$$

$$\text{किंवा } \frac{\text{खा}}{\text{का गा}} = \frac{\text{२कोज्या ख}}{\text{खा}},$$ (१०·३ अनुच्छेदानें)

किंवा $खा^2$ = २ का गा कोज्या ख

किंवा $खा^2 = गा^2 + का^2 - खा^2$,

(१०·२१ अनुच्छेदानें)

किंवा $२खा^2 = गा^2 + का^2$

सत्य असावयास पाहिजे.

पण $का^2$, $खा^2$, $गा^2$ समांतर श्रेढींत असल्यामुळें हा संबंध सत्य आहे.

म्हणून कोस्प क , कोस्प ख , कोस्प ग समांतर श्रेढींत आहेत.

उदाहरणसंग्रह १५

कखग या कोणत्याहि त्रिकोणांत सिद्ध करा की,

(१) $का कोज्या \frac{ख-ग}{२} = (खा+गा) ज्या\frac{क}{२}$

(२) $\frac{का^२ ज्या (ख-ग)}{ज्या क} + \frac{खा^२ ज्या (ग-क)}{ज्या ख} + \frac{गा^२ ज्या (क-ख)}{ज्या ग} = ०$

[नागपूर १९२६

(३) $का ज्या क - खा ज्या ख = गा ज्या (क-ख)$

[नागपूर १९४३

(४) अ कोणताहि कोण असल्यास

$खा कोज्या अ = गा कोज्या (क-अ) + का कोज्या (ग+अ)$

[नागपूर १९४२

(५) $(का-खा+गा) स्प \frac{ख}{२} = (का+खा-गा) स्प\frac{ग}{२}$

[नागपूर १९४०

(६) $स्प \frac{ख}{२} स्प \frac{ग}{२} = \frac{खा + गा - का}{खा + गा + का}$ [नागपूर १९५४

(७) $(का + खा + गा) \left(स्प \frac{क}{२} + स्प \frac{ख}{२} \right) = २ \, गा \, कोस्प \frac{ग}{२}$

(८) $का \, ज्या \, (ख - ग) + खा \, ज्या \, (ग - क) + गा \, ज्या \, (क - ख) = ०$
[बनारस १९३८

(९) $\frac{का^२ \, ज्या \, (ख - ग)}{ज्या \, ख + ज्या \, ग} + \frac{खा^२ \, ज्या \, (ग - क)}{ज्या \, ग + ज्या \, क} + \frac{गा^२ \, ज्या \, (क - ख)}{ज्या \, क + ज्या \, ख} = ०$
[बनारस १९४१

(१०) $\frac{ज्या \, (क - ख)}{ज्या \, (क + ख)} = \frac{का^२ - खा^२}{गा^२}$ [अलाहाबाद १९४१

(११) $(खा - गा) \, कोस्प \frac{क}{२} + (गा - का) \, कोस्प \frac{ख}{२} + (का - खा) \, कोस्प \frac{ग}{२} = ०$
[पाटणा १९५४

(१२) $(खा - गा) \, कोज्या \frac{क}{२} = का \, ज्या \frac{ख - ग}{२}$
[पाटणा १९४२

(१३) कखग त्रिकोणाच्या का, खा, गा या भुजा अशा आहेत कीं $२ खा^{२} = का^{२} + गा^{२}$. तर

$$\frac{ज्या\ ३\ ख}{ज्या\ ख} = \left(\frac{का^{२} - गा^{२}}{२\ का\ गा}\right)^{२}$$ हें दाखवा.

[नागपूर १९४६

(१४) कखग त्रिकोणांत का कोज्या क = खा कोज्या ख असल्यास एकतर का = खा, किंवा ग हा लंबकोण आहे हें सिद्ध करा.

[अलाहाबाद १९४२

(१५) कखग त्रिकोणांत कोज्या ख = $\frac{ज्या\ क}{२\ ज्या\ ग}$ असेल तर हा त्रिकोण समद्विभुज आहे हें दाखवा.

[बनारस १९४४

(१६) कोणत्याहि त्रिकोणाच्या बाजू समांतर श्रेढींत असल्यास त्या त्रिकोणाच्या अर्धकोणांच्या कोटिस्पर्शज्याहि समांतर श्रेढींत असतात हें सिद्ध करा.

(१७) कखग त्रिकोणांत स्प $\frac{क}{२} = \frac{५}{६}$ व स्प $\frac{ख}{२} = \frac{२०}{३७}$ असल्यास स्प $\frac{ग}{२}$ काढा व या त्रिकोणांत का + गा = २खा आहे हें दाखवा.

[नागपूर १९४२

(१८) कखग या त्रिकोणांतील खग या आधारावर च हा असा बिंदु आहे की $\frac{खच}{चग} = \frac{म}{न}$, आणि जर

∠खफच = इ, ∠चफग = ई व ∠गचफ = अ असेल तर सिद्ध करा की

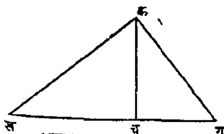
(म + न) कोस्प अ = म कोस्प इ − न कोस्प ई

= न कोस्प ख − म कोस्प ग

प्रकरण अकरावें

त्रिकोणाचे गुणधर्म (properties)

११.१ त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ.



आ ११.१

कखग हा एक त्रिकोण असून कच हा क पासून खग वर काढलेला लंब आहे.

त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ Δ ने दर्शवा.

$$\therefore \quad \Delta = \frac{१}{२}\left(\text{आधार} \times \text{उंची}\right) = \frac{१}{२}\,\text{खग.कच}$$

$$= \frac{१}{२}\,\text{खग.कख ज्या ख} = \frac{१}{२}\,\text{गा का ज्या ख}$$

किंवा $= \frac{१}{२}\,\text{का खा ज्या ग}$, (कारण गा ज्या ख = खा ज्या ग)

किंवा $= \frac{१}{२}\,\text{खा गा ज्या क}$, (कारण का ज्या ग = गा ज्या क)

$$\therefore \; \Delta = \frac{१}{२}\,\text{खा गा ज्या क} = \frac{१}{२}\,\text{गा का ज्या ख} = \frac{१}{२}\,\text{का खा ज्या ग}$$

$\therefore\ \Delta = \frac{1}{2}$(दोन बाजूंचें गुणनफल) ×

(त्यांच्या अंतर्गत कोणाची ज्या)

आता $\Delta = \frac{1}{2}$ खा गा ज्या क

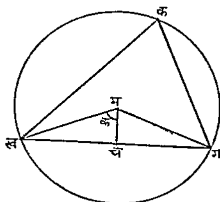
$= $ खा गा ज्या $\frac{क}{2}$ कोज्या $\frac{क}{2}$

$= $ खा गा $\sqrt{\frac{(सा - खा)(सा - गा)}{खा\ गा}} \cdot \sqrt{\frac{सा(सा - का)}{खा\ गा}}$

$= \sqrt{सा\ (सा - का)\ (सा - खा)\ (सा - गा)}$

हें सूत्र त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ भुजांच्या रूपांत देतें.

११.२ कोणत्याहि त्रिकोणाला परिलिखित (circumscribing) करणाऱ्या वृत्ताची त्रिज्या.



आ. ११.२

कखग त्रिकोणाला परिलिखित करणाऱ्या वृत्ताचें म हें केंद्र असून त्रा त्याची त्रिज्या आहे.

∠ खमग दुभागणारी मच ही रेषा काढा. मच खगची लंबद्विभाजक आहे.

रैखिकोने, केंद्राशी असलेला $\angle$खमग = २$\angle$खकग = २क

$\therefore \angle$खमच = $\frac{१}{२}$ $\angle$खमग = क

आता खच = खम ज्या खमच

पण खच = $\frac{का}{२}$

आणि खम = त्रा

$\therefore$ $\frac{का}{२}$ = त्रा ज्या क

$\therefore$ त्रा = $\frac{का}{२ ज्या क}$

त्याचप्रमाणे, त्रा = $\frac{खा}{२ ज्या ख}$,

त्रा = $\frac{गा}{२ ज्या ग}$

$\therefore \frac{का}{ज्या क} = \frac{खा}{ज्या ख} = \frac{गा}{ज्या ग}$ = २ त्रा

कोणत्याहि त्रिकोणास परिलिखित करणाऱ्या वृत्ताला परिवृत्त (circumcircle), त्याच्या केंद्रास परिकेंद्र (circumcentre) व त्याच्या त्रिज्येस परित्रिज्या (circumradius) म्हणतात.

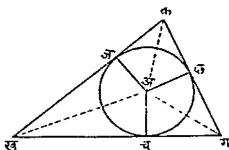
उपसाध्य :— का = २ त्रा ज्या क,
खा = २ त्रा ज्या ख,
गा = २ त्रा ज्या ग

११·२१ परित्रिज्या भुजांच्या रुपांत व्यक्त करतां येते.

$$\text{त्रा} = \frac{\text{का}}{\text{२ ज्या क}} = \frac{\text{का खा गा}}{\text{२ खा गा ज्या क}}$$

$$= \frac{\text{का खा गा}}{\text{४ } \Delta} \qquad \text{(११·१ अनुच्छेदानें)}$$

११·३ कोणत्याहि त्रिकोणांत अंतर्लिखित केलेल्या वृत्ताची त्रिज्या.



आ. ११३

समजा, कखग त्रिकोणांत अंतर्लिखित केलेल्या वृत्ताचें अ हें केंद्र असून च, छ, ज हे त्रिकोणाच्या भुजांचे स्पर्शबिंदू आहेत. अच, अछ, अज हे भुजांना लंब आहेत आणि त्यांपैकी प्रत्येकाची लांबी वृत्तत्रिज्या त्र एवढी आहे.

आता, कखग त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ

= खअग, गअक व कअख या त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचा योग

$$\therefore \quad \Delta = \frac{१}{२}\text{खग.अच} + \frac{१}{२}\text{गक.अछ} + \frac{१}{२}\text{कख.अज}$$

$$= \frac{१}{२}\text{का त्र} + \frac{१}{२}\text{खा त्र} + \frac{१}{२}\text{गा त्र}$$

$= \frac{१}{२}$ त्र (का + खा + गा)

= त्र सा, ($\because$ का + खा + गा = २सा)

$\therefore$ त्र $= \frac{\Delta}{\text{सा}}$

कोणत्याहि त्रिकोणांत अंतर्लिखित केलेल्या वृत्तास अंतर्वृत्त (incircle), त्याच्या केंद्रास अंतःकेंद्र (incentre) व त्रिज्येस अंतस्त्रिज्या (inradius) म्हणतात.

टीप. शिरोबिंदूंचीं (vertices) अंतःकेंद्रापासून अंतरें.

Δ कअज वरून,

अक = अज व्युज्ज्या अकअ

$\therefore$ अक = त्र व्युज्ज्या $\frac{\text{क}}{२}$

तसेंच, अख = त्र व्युज्ज्या $\frac{\text{ख}}{२}$

अग = त्र व्युज्ज्या $\frac{\text{ग}}{२}$

११.२१ त्र करितां दुसरें एक व्यंजक.

मागील अनुच्छेदाच्या आकृतींत, त्रिकोणाचे कोण दुभागणाऱ्या रेषांचा अ हा छेदनबिंदु आहे.

म्हणून, $\angle$ अखच $= \frac{\text{ख}}{२}$, $\angle$ अगच $= \frac{\text{ग}}{२}$

$\therefore$ अखच, बगच त्रिकोणांवरून,

$$खच = त्र \text{ कोस्प}\frac{ख}{२}, \quad गच = त्र \text{ कोस्प}\frac{ग}{२}$$

आता, $खच + गच = का$

$$\therefore \; त्र\left(\text{कोस्प}\frac{ख}{२} + \text{कोस्प}\frac{ग}{२}\right) = का$$

$$\therefore \; \frac{त्र\left(\text{कोज्या}\frac{ख}{२}\text{ज्या}\frac{ग}{२} + \text{कोज्या}\frac{ग}{२}\text{ज्या}\frac{ख}{२}\right)}{\text{ज्या}\frac{ख}{२}\text{ज्या}\frac{ग}{२}} = का$$

किंवा $\; त्र \text{ ज्या}\left(\frac{ख+ग}{२}\right) = का \text{ ज्या}\frac{ख}{२}\text{ज्या}\frac{ग}{२}$

आता, कखग त्रिकोणांत

$$\frac{ख+ग}{२} = ९०^\circ - \frac{क}{२}$$

$$\therefore \; \text{ज्या}\frac{ख+ग}{२} = \text{कोज्या}\frac{क}{२}$$

$$\therefore \; त्र = \frac{का \text{ ज्या}\frac{ख}{२}\text{ज्या}\frac{ग}{२}}{\text{कोज्या}\frac{क}{२}}$$

पण $\; का = २ त्रा \text{ ज्या } क = ४ त्रा \text{ ज्या}\frac{क}{२}\text{कोज्या}\frac{क}{२}$

$$\therefore \quad त्र = ४\ त्रा\ ज्या \frac{क}{२} ज्या \frac{ख}{२} ज्या \frac{ग}{२};$$

वैकल्पिक (alternative) रीत—

$$आता,\ त्र = \frac{\Delta}{सा} = \frac{२\Delta}{का + खा + गा}$$

$$= \frac{खा\ गा\ ज्या\ क}{का + खा + गा}$$

$$= \frac{२\ त्रा\ ज्या\ ख.\ २\ त्रा\ ज्या\ ग.\ ज्या\ क}{२\ त्रा\ (ज्या\ क + ज्या\ ख + ज्या\ ग)}$$

$$= \frac{२\ त्रा\ ज्या\ क\ ज्या\ ख\ ज्या\ ग}{ज्या\ क + ज्या\ ख + ज्या\ ग}$$

पण ९·२ अनुच्छेदांतील उदाहरण १ वरून

ज्या क + ज्या ख + ज्या ग

$$= ४\ कोज्या \frac{क}{२} कोज्या \frac{ख}{२} कोज्या \frac{ग}{२}$$

$$\therefore त्र = \frac{१६\ त्रा\ ज्या \frac{क}{२} कोज्या \frac{क}{२} \cdot ज्या \frac{ख}{२} कोज्या \frac{ख}{२} \cdot ज्या \frac{ग}{२} कोज्या \frac{ग}{२}}{४\ कोज्या \frac{क}{२} कोज्या \frac{ख}{२} कोज्या \frac{ग}{२}}$$

$$= ४\ त्रा\ ज्या \frac{क}{२} ज्या \frac{ख}{२} ज्या \frac{ग}{२}$$

११·२२ त्र करिता आणखी एक व्यंजक.

११·२ . या अनुच्छेदांतील आकृतींत, खच व खज अंतर्वृत्ताच्या, ख या एकाच बिंदूपासून असलेल्या, दोन स्पर्श-रेषा आहेत.

$\therefore$ खच = खज

त्याचप्रमाणे, गच = गछ

व कछ = कज

आता, परिमाप २सा = (कछ + कज) + (खज + खच) + (गच + गछ)

$\therefore$ सा = कज + खच + चग = कज + का

किंवा कज = सा − का

आता, कअज त्रिकोणावरून,

$$\frac{\text{अज}}{\text{कज}} = \text{स्प}\ \frac{\text{क}}{२}$$

$$\therefore\ \text{त्र} = \text{कज स्प}\ \frac{\text{क}}{२}$$

$$\text{किंवा त्र} = (\text{सा} - \text{का})\ \text{स्प}\ \frac{\text{क}}{२}$$

$$\text{तसेंच,}\ \text{त्र} = (\text{सा} - \text{खा})\ \text{स्प}\frac{\text{ख}}{२}$$

$$\text{त्र} = (\text{सा} - \text{गा})\ \text{स्प}\frac{\text{ग}}{२}$$

वैकल्पिक रीत—

$$\text{आता}\ \ \text{त्र} = \frac{\triangle}{\text{सा}}$$

$$= \frac{\sqrt{\text{सा}\,(\text{सा} - \text{का})}}{\text{सा}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{का})\,(\text{सा} -}{\text{सा}}}$$

$$= (\text{सा} - \text{का}) \sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{खा})\,(}{\text{सा}\,(\text{सा} -}}$$

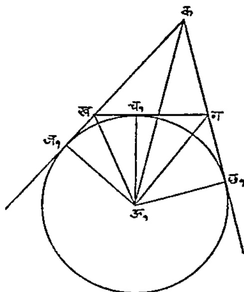
$$= (\text{सा} - \text{का})\ \text{स्प}\,\frac{\text{क}}{२}$$

$$\text{तसेंच, त्र} = (\text{सा} - \text{खा})\ \text{स्प}\,\frac{\text{ख}}{२}$$

$$\text{त्र} = (\text{सा} - \text{गा})\ \text{स्प}\,\frac{\text{ग}}{२}$$

११·७ कोणत्याहि त्रिकोणाच्या एका बाजूस व बाकीच्या दोन वाढविलेल्या बाजूंना स्पर्श करणाऱ्या वृत्तास बहिर्लिखित वृत्त (escribed circle) म्हणतात. प्रत्येक त्रिकोणाला तीन बहिर्लिखित वृत्तें असतात. कखग त्रिकोणाच्या तीन बहिर्लिखित वृत्तांपैकी एक वृत्त खग ला व कख, कग या वाढविलेल्या बाजूंना स्पर्श करतें; दुसरें गक ला व खग, खक या वाढविलेल्या बाजूंना स्पर्श करतें; तिसरें कख ला व गक, गख या वाढविलेल्या बाजूंना स्पर्श करतें. बहिर्लिखित वृत्तांना बहिर्वृत्तें (excircles), त्यांच्या केंद्रांना बहिष्केंद्रें (excentres), व त्यांच्या त्रिज्यांना बहिस्त्रिज्या (exradii) म्हणतात.

११.३१ कखग त्रिकोणांच्या वहिर्वृत्तांच्या त्रिज्या.



आ. ११·८

कखग त्रिकोणाच्या खग ला व कग, कख या वाढविलेल्या बाजूंना अनुक्रमें $च_1$, $छ_1$ आणि $ज_1$ या बिंदूंत स्पर्श करणाऱ्या वहिर्वृत्ताचें $अ_1$ हें केंद्र असून $त्र_1$ ही त्याची त्रिज्या आहे असें समजा. $च_1$, $छ_1$ आणि $ज_1$ हे बिंदू $अ_1$ ला जोडून येणाऱ्या रेषा त्रिकोणाच्या भुजांना लंब असून $अ_1च_1 = अ_1छ_1 = अ_1ज_1 = त्र_1$

आता, $\triangle$ कखग $= \triangle अ_1कख + \triangle अ_1गक - \triangle अ_1गख$

$$\therefore अ,ख = त्र, व्युत्कोज्या \frac{ख}{२}$$

$$तसेंच,\ अ, ग = त्र,\ व्युत्कोज्या \frac{ग}{२}$$

अ,, अ, हीं अनुक्रमें ख आणि ग या कोणांसमोरील बहिष्केंद्रें असतील तर त्यांचीं शिरोबिंदूपासून अंतरें अशाच रीतीनें काढतां येतील.

शिवाय $\angle खअ, ग = \angle खअ, च, + \angle गअ, च,$
आता खच,अ,ज, चक्रिक चौकोण आहे.

$$\therefore\quad \angle खअ, च, = \frac{ख}{२}$$

$$तसेंच,\quad \angle गअ, च, = \frac{ग}{२}$$

$$\therefore\quad \angle खअ, ग = \frac{ख}{२} + \frac{ग}{२}$$

$$= ९०^{\circ} - \frac{क}{२}$$

$$तसेंच,\quad \angle गअ, क = ९०^{\circ} - \frac{ख}{२},$$

$$\angle कअ, ख = ९०^{\circ} - \frac{ग}{२}$$

११.४२ बहिस्त्रिज्यांकरिता दुसरीं व्यंजकें.

मागील अनुच्छेदाच्या आकृतींत, अ, हा, ख आणि ग हे बाह्यकोण दुभागणाऱ्या रेषांचा छेदनबिंदु अ.दे.

$\therefore \angle अ_1 खच_1 = ९०° - \frac{ख}{२}$,

$\angle अ_1 गच_1 = ९०° - \frac{ग}{२}$

$\therefore \Delta अ_1 खच_1$ घरुन, $खच_1 = अ_1 कोस्प\left(९०° - \frac{ख}{२}\right)$

$= अ_1 स्प\frac{ख}{२}$

$\Delta अ_1 गच_1$ घरुन

$गच_1 = अ_1$ $कोस्प\left(९०° - \frac{ग}{२}\right) = अ_1 स्प\frac{ग}{२}$

पण $खच_1 + गच_1 = का$

$\therefore \quad अ_1\left(स्प\frac{ख}{२} + स्प\frac{ग}{२}\right) = का$

किंवा $अ_1$, $ज्या\left(\frac{ख+ग}{२}\right) = का\ कोज्या\frac{ख}{२}\ कोज्या\frac{ग}{२}$

$\therefore अ_1 = \frac{का\ कोज्या\frac{ख}{२}\ कोज्या\frac{ग}{२}}{कोज्या\frac{क}{२}}$

आता, $का = २\ आ\ ज्या\ क$

$= ४\ आ\ ज्या\frac{क}{२}\ कोज्या\frac{क}{२}$

त्याचप्रमाणे, $त्र_2 = ४ त्रा कोज्या \frac{क}{२} ज्या \frac{ख}{२} कोज्या \frac{ग}{२}$

$$त्र_3 = ४ त्रा कोज्या \frac{क}{२} कोज्या \frac{ख}{२} ज्या \frac{ग}{२}$$

वैकल्पिक रीत—

आता, $त्र_1 = \frac{\Delta}{सा - का} = \frac{२ \Delta}{२सा - २का}$

$$= \frac{खा\ गा\ ज्या\ क}{खा + गा - का}$$

$$= \frac{२ त्रा\ ज्या\ ख.\ २ त्रा\ ज्या\ ग.\ ज्या\ क}{२ त्रा\ (ज्या\ ख + ज्या\ ग - ज्या\ क)}$$

$$= \frac{२ त्रा\ ज्या\ क\ ज्या\ ख\ ज्या\ ग}{(ज्या\ ख + ज्या\ ग - ज्या\ क)}$$

आता, ज्या ख + ज्या ग − ज्या क

$$= \frac{२\Delta}{गा\ का} + \frac{२\Delta}{का\ खा} - \frac{२\Delta}{खा\ गा}$$

(११·१ अनुच्छेदाने)

$$= \frac{२\Delta}{काखागा} (खा + गा - का)$$

$$= \frac{२}{काखागा} \times \sqrt{सा\ (सा - का)(सा - खा)(सा - गा)} \times (२\ सा - २\ का)$$

$$\text{फछ}_1 = \text{फज}_1 = \text{सा}$$

Δ $\text{अ}_1\text{फज}_1$ वरून,

$$\text{अ}_1\text{ज}_1 = \text{फज}_1 \text{ स्प} \frac{\text{फ}}{२}$$

किंवा $\text{अ}_1 = \text{सा स्प} \dfrac{\text{क}}{२}$

तसेंच, $\text{अ}_2 = \text{सा स्प} \dfrac{\text{ख}}{२}$

$$\text{अ}_3 = \text{सा स्प} \frac{\text{ग}}{२}$$

वैकल्पिक रीत—

$$\text{आता, } \text{अ}_1 = \frac{\Delta}{\text{सा} - \text{का}}$$

$$= \frac{\sqrt{\text{सा} (\text{सा} - \text{का}) (\text{सा} - \text{खा}) (\text{सा} - \text{गा})}}{(\text{सा} - \text{का})}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{सा} (\text{सा} - \text{खा}) (\text{सा} - \text{गा})}{(\text{सा} - \text{का})}}$$

$$= \text{सा} \sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{खा}) (\text{सा} - \text{गा})}{\text{सा} (\text{सा} - \text{का})}}$$

$$\text{अ}_1 = \text{सा स्प} \frac{\text{क}}{२}$$

तसेंच, $\text{अ}_2 = \text{सा स्प} \dfrac{\text{ख}}{२}$

$$\text{अ}_3 = \text{सा स्प} \frac{\text{ग}}{२}$$

$\therefore$ फछ$_1$ = फज$_1$ = सा

$\triangle$ त्र$_1$फज$_1$ घरून,

$$\text{त्र}_1\text{ज}_1 = \text{फज}_1 \text{ स्प} \frac{\text{क}}{2}$$

$$\text{किंवा } \text{त्र}_1 = \text{सा स्प} \frac{\text{क}}{2}$$

$$\text{तसेंच, } \text{त्र}_2 = \text{सा स्प} \frac{\text{ख}}{2}$$

$$\text{त्र}_3 = \text{सा स्प} \frac{\text{ग}}{2}$$

वैकल्पिक रीत—

$$\text{आता, } \text{त्र}_1 = \frac{\triangle}{\text{सा} - \text{का}}$$

$$= \frac{\sqrt{\text{सा}(\text{सा} - \text{का})(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})}}{(\text{सा} - \text{का})}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{सा}(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})}{(\text{सा} - \text{का})}}$$

$$= \text{सा}\sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})}{\text{सा}(\text{सा} - \text{का})}}$$

$$\therefore \text{त्र}_1 = \text{सा स्प} \frac{\text{क}}{2}$$

$$\text{तसेंच, } \text{त्र}_2 = \text{सा स्प} \frac{\text{ख}}{2}$$

$$\text{त्र}_3 = \text{सा स्प} \frac{\text{ग}}{2}$$

११·५ उदाहरण १. सिद्ध करा—

$$\Delta = २ त्रा^{२} ज्या\ क\ ज्या\ ख\ ज्या\ ग$$

$$२ त्रा^{२} ज्या\ क\ ज्या\ ख\ ज्या\ ग = २ त्रा^{२} . \frac{का}{२त्रा} . \frac{खा}{२ त्रा} . \frac{गा}{२त्रा}$$

(११.२ अनुच्छेदाने)

$$= \frac{का\ खा\ गा}{४\ त्रा}$$

$$\because \quad = \Delta \qquad \text{(११.२१ अनुच्छेदाने)}$$

$$\therefore\ \Delta = २ त्रा^{२} ज्या\ क\ ज्या\ ख\ ज्या\ ग$$

उदाहरण २. सिद्ध करा—

$$(त्र_{१} + त्र_{२}) स्प \frac{ग}{२} = (त्र_{३} - त्र) कोस्प\ \frac{ग}{२} = गा$$

आता, $(त्र_{१} + त्र_{२}) स्प \frac{ग}{२} = \left(सा\ स्प \frac{क}{२} + सा\ स्प\ \frac{ख}{२}\right) स्प\ \frac{ग}{२}$

(११.४३ या अनुच्छेदाने)

$$= सा\ स्प\ \frac{ग}{२} \left(स्प\ \frac{क}{२} + स्प \frac{ख}{२}\right)$$

$$= त्र_{३} \left(\frac{ज्या\ \frac{क}{२}}{कोज्या\ \frac{क}{२}} + \frac{ज्या\ \frac{ख}{२}}{कोज्या\ \frac{ख}{२}} \right)$$

$$= \text{त्र}_3 \frac{\text{ज्या}\left(\frac{\text{क}+\text{ख}}{2}\right)}{\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{2}\ \text{कोज्या}\frac{\text{ख}}{2}}$$

$$= \text{त्र}_3 \frac{\text{कोज्या}\frac{\text{ग}}{2}}{\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{2}\ \text{कोज्या}\frac{\text{ख}}{2}}, \left(\because \frac{\text{क}+\text{ख}}{2} = 90^\circ - \frac{\text{ग}}{2}\right)$$

$$= 4\ \text{त्रा कोज्या}\frac{\text{क}}{2}\ \text{कोज्या}\frac{\text{ख}}{2}\ \text{ज्या}\frac{\text{ग}}{2} \times \frac{\text{कोज्या}\frac{\text{ग}}{2}}{\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{2}\ \text{कोज्या}\frac{\text{ख}}{2}}$$

(११·४२ अनुच्छेदाने)

$$= 4\ \text{त्रा ज्या}\frac{\text{ग}}{2}\ \text{कोज्या}\frac{\text{ग}}{2}$$

$$= 2\ \text{त्रा ज्या ग} = \text{गा}$$

शिवाय, $(\text{त्र}_3 - \text{त्र})\ \text{कोस्प}\frac{\text{ग}}{2} = \left\{\text{सा स्प}\frac{\text{ग}}{2} - (\text{सा} - \text{गा}) \times \text{स्प}\frac{\text{ग}}{2}\right\} \text{कोस्प}\frac{\text{ग}}{2}$

(११·३२ व ११·४३ या अनुच्छेदांवरून)

$$= (\text{सा} - \overline{\text{सा} - \text{गा}}) = \text{गा}$$

$$\therefore (\text{त्र}_1 + \text{त्र}_2)\,\text{स्प}\,\frac{\text{ग}}{२} = (\text{त्र}_3 - \text{त्र})\,\text{कोस्प}\,\frac{\text{ग}}{२} = \text{गा}$$

उदाहरण ३. सिद्ध करा—

$$(\text{त्र}_1 - \text{त्र})(\text{त्र}_2 - \text{त्र})(\text{त्र}_3 - \text{त्र}) = ४\,\text{त्रा}\,\text{त्र}^2$$

११·३ व ११·४१ या अनुच्छेदांवरून,

$$(\text{त्र}_1 - \text{त्र})\ (\text{त्र}_2 - \text{त्र})\ (\text{त्र}_3 - \text{त्र})$$

$$= \left(\frac{\Delta}{\text{सा} - \text{का}} - \frac{\Delta}{\text{सा}}\right)\left(\frac{\Delta}{\text{सा} - \text{खा}} - \frac{\Delta}{\text{सा}}\right)\left(\frac{\Delta}{\text{सा} - \text{गा}} - \frac{\Delta}{\text{सा}}\right)$$

$$= \frac{\Delta^3 (\text{सा} - \overline{\text{सा} - \text{का}})(\text{सा} - \overline{\text{सा} - \text{खा}})(\text{सा} - \overline{\text{सा} - \text{गा}})}{\text{सा}^3 (\text{सा} - \text{का})(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})}$$

$$= \frac{\Delta^3\,\text{का}\,\text{खा}\,\text{गा}}{\text{सा}^2\,\Delta^2}$$

$$= \frac{\Delta\,\text{का}\,\text{खा}\,\text{गा}}{\text{सा}^2}$$

$$= \frac{\Delta^2}{\text{सा}^2}\cdot\left(\frac{\text{का}\,\text{खा}\,\text{गा}}{\Delta}\right)$$

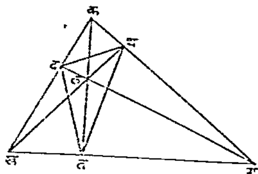
$$= \text{त्र}^2 . ४\text{त्रा} \qquad (\text{अनु० ११·२१})$$

$$(\text{त्र}_1 - \text{त्र})(\text{त्र}_2 - \text{त्र})(\text{त्र}_3 - \text{त्र}) = ४\text{त्रा}\,\text{त्र}^2$$

११.६ त्रिकोणाच्या भुजांपासून व कोनबिंदूंपासून (angular points) लंबकेंद्राची (orthocentre) अंतरे.

कखग त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंपासून समोरील बाजूंवर कत, खथ व गद हे लंब काढा. या तीन रेषांचा छेदनबिंदु ल, त्रिकोणाचे लंबकेंद्र आहे.

तथ, थद, दत जोडा. तथद हा कखग त्रिकोणाचा पादिक (pedal) त्रिकोण आहे.



आ. ११.५

कखत त्रिकोणांत,

$$\text{खत} = \text{कख कोज्या ख}$$
$$= \text{ग कोज्या ख}$$

गखथ त्रिकोणांत,

$$\angle \text{गखथ} = ९०^\circ - \text{ग}$$

लखत त्रिकोणांत,

$$\frac{\text{लत}}{\text{खत}} = \text{स्प तखल}$$
$$= \text{स्प गखथ}$$

∴ लत = खत स्प गखथ

= गा कोज्या ख स्प (९०° − ग)

= गा कोज्या ख कोस्प ग

पण गा = २ त्रा ज्या ग

∴ लत = २ त्रा कोज्या ख कोज्या ग

त्याचप्रमाणे, लथ = २ त्रा कोज्या ग कोज्या क

लद = २ त्रा कोज्या क कोज्या ख

पुन्हा, कखथ त्रिकोणांत,

कथ = कख कोज्या क = गा कोज्या क

आणि कतग त्रिकोणांत,

∠ गकत = ९०° − ग

△ फलथ मध्ये, $\frac{\text{फल}}{\text{कथ}}$ = व्युत्कोज्या थफल

= व्युत्कोज्या गकत

∴ फल = कथ व्युत्कोज्या गकत

= गा कोज्या क व्युत्कोज्या (९०° − ग)

= गा कोज्या क व्युज्ज्या ग

= २ त्रा ज्या ग. कोज्या क व्युज्ज्या ग

= २ त्रा कोज्या क

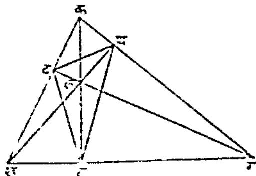
त्याचप्रमाणे, खल = २ त्रा कोज्या ख

गल = २ त्रा कोज्या ग

११.६ त्रिकोणाच्या भुजांपासून व कोणबिंदूंपासून (angular points) लंबकेंद्राची (orthocentre) अंतरें.

कखग त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंपासून समोरील बाजूवर कत, खथ व गद हे लंब काढा. या तीन रेषांचा छेदनबिंदु ल, त्रिकोणाचें लंबकेंद्र आहे.

तथ, थद, दत जोडा. तथद हा कखग त्रिकोणाचा पदिक (pedal) त्रिकोण आहे.



आ. ११.५

कखत त्रिकोणांत,

खत = कख कोज्या ख

= ग कोज्या ख

गखथ त्रिकोणांत,

∠गखथ = ९० − ग

लखत त्रिकोणांत,

$$\frac{\text{लत}}{\text{खत}} = \text{स्प लखत}$$

= स्प गखथ

∴ लत = खत स्प गखथ

= गा कोज्या ख स्प (९०° − ग)

= गा कोज्या ख कोस्प ग

पण गा = २ त्रा ज्या ग

∴ लत = २ त्रा कोज्या ख कोज्या ग

त्याचप्रमाणे, लथ = २ त्रा कोज्या ग कोज्या क

लद = २ त्रा कोज्या क कोज्या ख

पुन्हा, कखथ त्रिकोणांत,

कथ = कख कोज्या क = गा कोज्या क

आणि कतग त्रिकोणांत,

∠गकत = ९०° − ग

△कलथ मधे, $\frac{\text{कल}}{\text{कथ}}$ = व्युत्कोज्या थकल

= व्युत्कोज्या गकत

∴ कल = कथ व्युत्कोज्या गकत

= गा कोज्या क व्युत्कोज्या (९०° − ग)

= गा कोज्या क व्युज्ज्या ग

= २ त्रा ज्या ग. कोज्या क व्युज्ज्या ग

= २ त्रा कोज्या क

त्याचप्रमाणे, खल = २ त्रा कोज्या ख

गल = २ त्रा कोज्या ग

११·६१ पदिक त्रिकोणाच्या भुजा आणि कोन.

आता ∠लदख = ९०°, ∠लतख = ९०°
म्हणून दलतख हा चक्रिक चौकोन आहे.

∴ ∠दतल = ∠दखल
= ९०° − क

तसेच, लतगय हा चक्रिक चौकोन आहे.

∴ ∠लतय = ∠लगय
= ९०° − क

∴ ∠दतय = ∠दतल + ∠लतय
= १८०° − २ क

त्याचप्रमाणे, ∠तयद = १८०° − २ ख
∠यदत = १८०° − २ ग

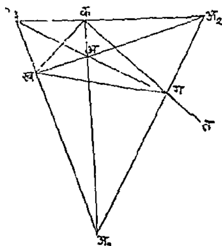
आता कगय त्रिकोणात
कय = गा कोज्या क

व कखद त्रिकोणात
कद = खा कोज्या क

म्हणून, कदय त्रिकोणात,
यद^2 = कद^2 + कय^2 − २कद.कय कोज्या क
= खा^{2}कोज्या^{2}क + गा^{2}कोज्या^{2}क
− २खा कोज्या क.गा कोज्या क.कोज्या क
= कोज्या^{2}क(खा^{2} + गा^{2} − २खा गा कोज्या क)
= का^{2}कोज्या^{2}क

थद = वा दोज्या क
त्याचप्रमाणे दत = वा कोटया ख
तथ = वा कोटया ग

११६२ समजा कखग त्रिकोणाचें अ हें अंत केंद्र असून क, ख, ग कोणासमोरील बहिष्केंद्रें अनुक्रमें $अ_1$, $अ_2$, $अ_3$ हीं आहेत अग आणि $अ_1$ग हे कगख कोणाचे अनुक्रमें अंतर्द्विभाजक (internal bisector) आणि बाह्यद्विभाजक (external bisector) आहेत.



आ ११६

म्हणून रैखिकीनें,

∠अग$अ_1$ = ९०°

तसेंच ∠अग$अ_2$ = ९०°

म्हणून $अ_1$ग$अ_2$ ही एक सरळ रेषा असून अग तिला लंब आहे. तसेंच, $अ_2अ_3$ व $अ_3अ_1$ या सरळ रेषा असून अक आणि अख त्यांना लंब आहेत.

शिवाय अक व $अ_1$क या दोन्ही रेषा खकग हा अंतःकोण (internal angle) दुभागतात म्हणून क, अ, $अ_1$ हे बिंदू एकाच सरळ रेषेंत आहेत त्याचप्रमाणे खअ$अ_2$,

गघ$अ_3$ या सरळ रेषा आहेत. म्हणून क, ख आणि ग हे बिंदु $अ_1$, $अ_2$, $अ_3$ या त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूपासून समोरील बाजूंवर काढलेल्या लंबांचे पाद आहेत. हे लंब अ या बिंदूंत मिळतात. म्हणून कखग त्रिकोण $अ_1$, $अ_2$, $अ_3$ या त्रिकोणाचा पदिक त्रिकोण, आणि अ बिंदु $अ_1$, $अ_2$, $अ_3$ या त्रिकोणाचे लंबकेंद्र आहे.

उदाहरण. $अ_1$, $अ_2$, $अ_3$ या त्रिकोणाच्या भुजा व कोण काढा

कखग हा $अ_1$, $अ_2$, $अ_3$ या त्रिकोणाचा पदिक त्रिकोण आहे.

म्हणून ११·६१ या अनुच्छेदावरून,

$\angle$ खकग $= १८०^\circ - २ \angle अ_2 अ_1 अ_3$

किंवा $\angle क = १८०^\circ - २ \angle अ_1$

$$\therefore \quad \angle अ_1 = \frac{१८०^\circ - क}{२} = ९०^\circ - \frac{क}{२}$$

त्याचप्रमाणे, $\angle अ_2 = ९०^\circ - \frac{ख}{२}$

$$\angle अ_3 = ९०^\circ - \frac{ग}{२}$$

पुन्हा त्याच अनुच्छेदावरून

खग $= अ_1 अ_3$ कोज्या $अ_2 अ_1 अ_3$

किंवा का $= अ_2 अ_3$ कोज्या $अ_1$

$\therefore \quad अ_2 अ_3 =$ का व्युत्कोज्या $अ_1$

$= $ का व्युत्कोज्या $\left(९०^\circ - \frac{क}{२}\right) =$ का व्युज्या $\frac{क}{२}$

त्याचप्रमाणे, $अ_1 अ_2 = ग$ा व्युज्ज्या $\frac{ग}{२}$

$$अ_3 अ_1 = ख\text{ा व्युज्ज्या } \frac{ख}{२}$$

अन्यथा—

११·४१ या अनुच्छेदाच्या शेवटीं दिलेल्या टीपेनुसार,

$$\angle खअ_1 ग = ९०^\circ - \frac{क}{२}$$

पण $\angle खअ_1 ग = \angle अ_1$

$$\therefore \angle अ_1 = ९०^\circ - \frac{क}{२}$$

तसेंच, $\angle अ_2 = ९०^\circ - \frac{ख}{२}$, $\angle अ_3 = ९०^\circ - \frac{ग}{२}$

शिवाय, वर दिलेल्या आकृतींत, $\triangle कअ_1 अ_2$ मधे,

$$अ_1 अ_2 = अ_1 क \text{ व्युज्ज्या } अ_2$$

$$= अ_1 क \text{ व्युज्ज्या } \left(९०^\circ - \frac{ख}{२}\right)$$

$$= अ_1 क \text{ व्युत्कोज्या } \frac{ख}{२}$$

पण, $अ_1 क = त्र_1 \text{ व्युज्ज्या } \frac{क}{२}$

(११·३१ अनुच्छेदांतील टीप पहा)

$$\therefore अ_1 अ_2 = त्र_1 \text{ व्युज्ज्या } \frac{क}{२} \text{ व्युत्कोज्या } \frac{ख}{२}$$

$$= सा\ स्प\ \frac{फ}{२}\ व्युज्या\ \frac{क}{२}\ व्युत्कोज्या\ \frac{ख}{२}$$

$$= \frac{सा}{कोज्या\ \frac{क}{२}\ कोज्या\ \frac{ख}{२}}$$

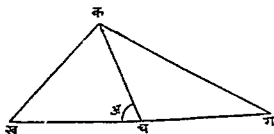
$$= सा \sqrt{\frac{खा\ गा . गा\ का}{सा\ (सा - का) . सा\ (सा - खा)}}$$

$$= गा \sqrt{\frac{का\ खा}{(सा - का)\ (सा - खा)}}$$

$$= गा\ व्युज्या\ \frac{ग}{२}$$

असाच रीतीने $अ_{२}अ_{३}$, $अ_{३}अ_{१}$ काढतां येतात.

११.७ मध्यकांच्या (medians) लांबी.



आ. ११ ७

कखग त्रिकोणांत कघ ही खग ला दुभागणारी रेषा आहे.

$\therefore \quad खच = गच = \frac{का}{२}$

कखच त्रिकोणांत,

$$कच^{२} = कख^{२} + खच^{२} - २कख.खच \text{ कोज्या } ख$$

$$= गा^{२} + \frac{का^{२}}{४} - २गा.\frac{का}{२}.\text{कोज्या } ख$$

$$\therefore \quad २कच^{२} = २गा^{२} + \frac{का^{२}}{२} - गा\,का \text{ कोज्या } ख$$

$$= २गा^{२} + \frac{का^{२}}{२} - (का^{२} + गा^{२} - खा^{२})$$

$$= गा^{२} + खा^{२} - \frac{का^{२}}{२}$$

$$\therefore \quad कच = \frac{१}{२}\sqrt{२गा^{२} + २खा^{२} - का^{२}}$$

त्याचप्रमाणे अनुक्रमें गक, कख यांना दुभागणाऱ्या खछ, गज या मध्यकांच्या लांबी पुढील समीकारांवरून मिळतात.

$$खछ = \frac{१}{२}\sqrt{२का^{२} + २गा^{२} - खा^{२}}$$

$$गज = \frac{१}{२}\sqrt{२खा^{२} + २का^{२} - गा^{२}}$$

२२९.

११·७१ मध्यकांच्या भुजांशीं नती (inclinations).

समजा $\angle$ कचख $=$ अ

कचख त्रिकोणांत,

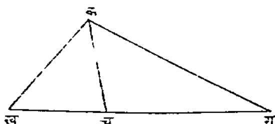
$$\frac{\text{कच}}{\text{ज्या ख}} = \frac{\text{गा}}{\text{ज्या अ}}$$

$$\therefore \quad \text{ज्या अ} = \frac{\text{गा ज्या ख}}{\text{कच}}$$

$$= \frac{\text{२ गा ज्या ख}}{\sqrt{\text{२गा}^2 + \text{२खा}^2 - \text{का}^2}}$$

$$= \frac{\text{४} \Delta}{\text{का} \sqrt{\text{२गा}^2 + \text{२खा}^2 - \text{का}^2}}$$

११·८ त्रिकोणाच्या कोनांचे द्विभाजक.



आ. ११·८

समजा कच रेषा क कोनाला दुभागून खग ला च बिंदूंत मिळते.

आता, Δ कखच $+$ Δ कचग $=$ Δ कखग

$\therefore \quad \frac{१}{२}$ कख. कच ज्या $\frac{क}{२} + \frac{१}{२}$ कग. कच ज्या $\frac{क}{२}$

$= \frac{१}{२}$ कख. कग ज्या क

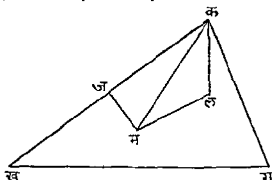
किंवा $\quad \frac{१}{२}$ कच ज्या $\frac{क}{२}$ (गा + खा) $= \frac{१}{२}$ गा खा ज्या क

किंवा $\quad$ कच (गा + खा) = २ खा गा कोज्या $\frac{क}{२}$

$\therefore$ कच $= \dfrac{२ \text{खा गा कोज्या} \frac{क}{२}}{\text{गा} + \text{खा}}$

शिवाय, $\angle$कचग = $\angle$चखक + $\angle$खकच = ख + $\frac{क}{२}$

११·९. लंबकेन्द्र व परिकेंद्र यांमधील अन्तर.



आ. ११.९

कखग त्रिकोणाचें ल हें लंबकेंद्र आणि म हें परिकें आहे. कख ला म पासून मज हा लंब काढा.

आता, $\angle$जमक = ग

$\therefore$ $\angle$मकख = ९०° − ग

आणि $\angle$लकख = ९०° − ख

$\therefore$ $\angle$मकल = $\angle$लकख − $\angle$मकख

= (९०° − ख) − (९०° − ग) = ग − ख

शिवाय, कल = २अ कोज्या क (अनुच्छेद ११६ वरून)

व कम = अ

म्हणून, कमल त्रिकोणांत,

मल² = कम² + कल² − २कम कल कोज्या मकल

= अ² + ४अ² कोज्या²क

− ४अ² कोज्या क कोज्या (ग − ख)

= अ²[१ + ४ कोज्या क { कोज्या क

− कोज्या (ग − ख) }]

= अ²[१ − ४ कोज्या क { कोज्या (ख + ग) +

कोज्या (ग − ख) }]

= अ² [१ − ८ कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग]

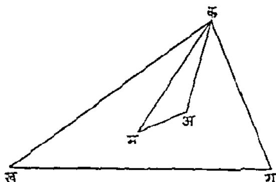
मल = अ $\sqrt{\text{१ − ८ कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग}}$

उपसाध्य :— कखग जर लंबत्रिकोण असेल तर

मल = त्रा।

११·२१ अंतःकेंद्र व परिकेंद्र यांमधील अंतर.

कखग त्रिकोणाचें अ हें अंतःकेंद्र व म हें परिकेंद्र आहे.



आ ११९१

$\therefore \angle$ गकअ $= \frac{\text{क}}{२}$, $\angle$ गकम $= ९०^\circ -$ ख

$\therefore \angle$ अकम $= \angle$ गकम $- \angle$ गकअ

$= ९०^\circ -$ ख $- \frac{\text{क}}{२} = \frac{\text{ग} - \text{ख}}{२}$

कम = त्रा

आणि कअ = ४ त्र्युज्या $\frac{\text{क}}{२}$,

(११·३ अनुच्छेदाच्या टीपेनुसार)

$$= \left(\text{४त्रा ज्या}\frac{\text{क}}{\text{२}}\text{ज्या}\frac{\text{ख}}{\text{२}}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{\text{२}}\right)\text{व्युज्ज्या}\frac{\text{क}}{\text{२}}$$

$$= \text{४त्रा ज्या}\frac{\text{ख}}{\text{२}}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{\text{२}}$$

अकम त्रिकोणांत,

$$\text{मअ}^{\text{२}} = \text{कम}^{\text{२}} + \text{कअ}^{\text{२}} - \text{२कम. कअ कोज्या अकम}$$

$$= \text{त्रा}^{\text{२}} + \text{१६त्रा}^{\text{२}}\text{ज्या}^{\text{२}}\frac{\text{ख}}{\text{२}}\text{ज्या}^{\text{२}}\frac{\text{ग}}{\text{२}} - \text{८त्रा}^{\text{२}}\text{ज्या}\frac{\text{ख}}{\text{२}}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{\text{२}}\text{कोज्या}\left(\frac{\text{ग} - \text{ख}}{\text{२}}\right)$$

$$= \text{त्रा}^{\text{२}}\left[\text{१} + \text{८ ज्या}\frac{\text{ख}}{\text{२}}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{\text{२}}\left\{\text{२ज्या}\frac{\text{ख}}{\text{२}}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{\text{२}} - \text{कोज्या}\left(\frac{\text{ग} - \text{ख}}{\text{२}}\right)\right\}\right]$$

$$= \text{त्रा}^{\text{२}}\left[\text{१} + \text{८ ज्या}\frac{\text{ख}}{\text{२}}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{\text{२}}\left(\text{ज्या}\frac{\text{ख}}{\text{२}}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{\text{२}} - \text{कोज्या}\frac{\text{ख}}{\text{२}}\text{कोज्या}\frac{\text{ग}}{\text{२}}\right)\right]$$

$$= \text{त्रा}^{\text{२}}\left[\text{१} - \text{८ ज्या}\frac{\text{ख}}{\text{२}}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{\text{२}}\text{कोज्या}\left(\frac{\text{ख} + \text{ग}}{\text{२}}\right)\right]$$

$$= \text{त्रा}^{\text{२}}\left[\text{१} - \text{८ ज्या}\frac{\text{ख}}{\text{२}}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{\text{२}}\text{ज्या}\frac{\text{क}}{\text{२}}\right]$$

$$\therefore \text{मअ} = \text{त्रा}\sqrt{\text{१} - \text{८ ज्या}\frac{\text{क}}{\text{२}}\text{ज्या}\frac{\text{ख}}{\text{२}}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{\text{२}}}$$

हें फल पुढील रूपांतहि लिहितां येतें.

$$\text{मअ}^2 = \text{त्रा}^2 - 2\text{त्रा}.4\text{त्रा ज्या} \frac{\text{क}}{2} \text{ज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ज्या} \frac{\text{ग}}{2}$$

$$= \text{त्रा}^2 - 2\text{त्रा त्र}$$

त्याचप्रमाणें

$$\text{मअ}_1 = \text{त्रा} \sqrt{1 + 8 \text{ ज्या} \frac{\text{क}}{2} \text{कोज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{कोज्या} \frac{\text{ग}}{2}}$$

$$= \sqrt{\text{त्रा}^2 + 2\text{त्रा त्र}_1}$$

हें सुद्धा दाखवितां येतें.

उदाहरणसंग्रह १६

(१) एका त्रिकोणाच्या भुजा ३, ४ व ५ पाद लांब आहेत. तर त्रा, त्र, त्र_1, त्र_2 व त्र_3 काढा.

(२) कखग या कोणत्याहि त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ

$\frac{1}{2} \text{गा}^2 \frac{\text{ज्या क ज्या ख}}{\text{ज्या ग}}$ आहे हें सिद्ध करा

सिद्ध करा की कोणत्याहि त्रिकोणांत,

(३) का कोस्प क + खा कोस्प ख + गा कोस्प ग $= 2(\text{त्रा} + \text{त्र})$

(४) $\text{त्र}_1 + \text{त्र}_2 + \text{त्र}_3 - \text{त्र} = 4\,\text{त्रा}$ [आंध्र १९४२

(५) $\left(\frac{1}{\text{त्र}_1} + \frac{1}{\text{त्र}_2}\right) \left(\frac{1}{\text{त्र}_2} + \frac{1}{\text{त्र}_3}\right) \left(\frac{1}{\text{त्र}_3} + \frac{1}{\text{त्र}_1}\right) = \frac{64\,\text{त्रा}^3}{\text{का}^2\,\text{खा}^2\,\text{गा}^2}$

[नागपूर १९२५

(६) $\frac{१}{\text{त्र}} = \frac{१}{\text{त्र}_१} + \frac{१}{\text{त्र}_२} + \frac{१}{\text{त्र}_३}$

(७) $\text{त्र}_२\text{त्र}_३ + \text{त्र}_३\text{त्र}_१ + \text{त्र}_१\text{त्र}_२ = \text{सा}^२$

[मुंबई १९२७

(८) $(\text{त्र}_२ - \text{त्र}_३)$ कोज्या क $+ (\text{त्र}_३ - \text{त्र}_१)$ कोज्या ख $+ (\text{त्र}_१ - \text{त्र}_२)$ कोज्या ग $= 0$

[आंध्र १९३५

(९) $\text{त्र}\ \text{त्र}_१\ \text{त्र}_२\ \text{त्र}_३ = \triangle^२$ [बनारस १९४३

(१०) $\triangle = ४$ आ त्र कोज्या $\frac{\text{क}}{२}$ कोज्या $\frac{\text{ख}}{२}$ कोज्या $\frac{\text{ग}}{२}$

(११) $(\text{त्र}_२ + \text{त्र}_३)\sqrt{\frac{\text{त्र}\ \text{त्र}_१}{\text{त्र}_२\ \text{त्र}_३}} = \text{का}$

[बनारस १९४२

(१२) $\frac{१}{२\,\text{आ}\,\text{त्र}} = \frac{१}{\text{खा}\,\text{गा}} + \frac{१}{\text{गा}\,\text{का}} + \frac{१}{\text{का}\,\text{खा}}$

[अलाहाबाद १९४२

(१३) कखग हा लंबकोणत्रिकोण असेल तर

$$\left(१ - \frac{\text{त्र}_१}{\text{त्र}_२}\right)\left(१ - \frac{\text{त्र}_१}{\text{त्र}_३}\right) = २$$

हें दाखवा. [नागपूर ११५१

(१४) कखग हा लंबकोणत्रिकोण असेल तर

$$\text{त्र}_१ = \text{त्र}_२ + \text{त्र}_३ + \text{त्र}$$

हें दाखवा. [नागपूर १९४३

(१५) कखग त्रिकोणाच्या क, ख, ग या शिरोबिंदूंपासून समोरील बाजूंवर काढलेल्या लंबांच्या लांबी अनुक्रमें $ल_1$, $ल_2$, $ल_3$ आहेत. तर सिद्ध करा की

(१) $\frac{१}{ल_1}+\frac{१}{ल_2}+\frac{१}{ल_3}=\frac{१}{त्र}$ [नागपूर १९३६

(२) $ल_1$ ही $त्र_2$ व $त्र_3$ यांचें हरात्मक समांतर मध्यक (harmonic mean) आहे.
[नागपूर १९४६

(३) $८\ त्रा^3=\frac{का^2\ खा^2\ गा^2}{ल_1\ ल_2\ ल_3}$ [अलाहाबाद १९३९

(१६) कखग त्रिकोणाच्या कोणबिंदूंपासून समोरील बाजूंवर काढलेले लंब म बिंदूंत मिळतात. मक = य, मख = र, मग = ल असल्यास

$\frac{का}{य}+\frac{खा}{र}+\frac{गा}{ल}=\frac{का\ खा\ गा}{य\ र\ ल}$ हें दाखवा.

[बनारस १९४३

(१७ कखग त्रिकोणाच्या क, ख, ग या कोणबिंदूंपासून समोरील बाजूंवर काढलेल्या लंबांचे पाद च, छ, ज आहेत. तर कछज, खचज, गचछ या त्रिकोणांना परिलिखित करणाऱ्या वृत्तांचे व्यास अनुक्रमें का कोस्प क, खा कोस्प ख, गा कोस्प ग आहेत हें सिद्ध करा. [बनारस १९३०

(१८) कखग त्रिकोणाच्या पदिक त्रिकोणाचें परिमाप ४ त्रा ज्या क ज्या ख ज्या ग आहे हें दाखवा.

[नागपूर १९४१

(१९) एका त्रिकोणाच्या परिकेंद्रापासून समोरील बाजूंवर काढलेले लंब ल, ल', ल'' आहेत. तर

$$\frac{का}{ल}+\frac{खा}{ल'}+\frac{गा}{ल''}=\frac{१}{४}\cdot\frac{का\,खा\,गा}{ल\,ल'\,ल''}$$ हें सिद्ध करा.

[बनारस १९३५

(२०) कखग या कोणत्याहि त्रिकोणांत,

$$\frac{\text{अंतर्वृत्ताचें क्षेत्रफळ}}{\text{त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ}}=\frac{प्या}{कोस्प\frac{क}{२}\,कोस्प\frac{ख}{२}\,कोस्प\frac{ग}{२}}$$

हें सिद्ध करा. [कलकत्ता बी. एस्सी १९२१

(२१) $अ_१$, $अ_२$, $अ_३$ हीं कखग त्रिकोणाचीं बहिर्केंद्रें असल्यास, सिद्ध करा की,

(१) $अ_२अ_३ = का\ व्युज्या\frac{क}{२} = ४\,त्रा\ कोज्या\frac{क}{२}$

(२) $अ_१अ_२अ_३$ या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ

$$=८त्रा^२\ कोज्या\frac{क}{२}\ कोज्या\frac{ख}{२}\ कोज्या\frac{ग}{२}$$

$$=\frac{का\,खा\,गा}{२त्रा}$$ [नागपूर १९४०, १९४४

(३) $\text{अ}_2\text{अ}_3 \cdot \text{अ}_3\text{अ}_1 \cdot \text{अ}_1\text{अ}_2 = \dfrac{१६\ \text{त्रा}^2 \Delta}{\text{त्र}}$

(२२) अ, अ_1, अ_2 व अ_3 ही कखग त्रिकोणाचें अंतर्वृत्त आणि तीन बहिर्वृत्त यांचीं केंद्रें आहेत तर सिद्ध करा कीं,

(१) $\text{अअ}_1 = \text{वा व्युत्कोज्या}\ \dfrac{\text{क}}{२} = ४\ \text{त्रा ज्या}\ \dfrac{\text{क}}{२}$

[नागपूर १९३१

(२) $\text{अअ}_1 \cdot \text{अअ}_2 \cdot \text{अअ}_3 = १६\ \text{त्रा}^2\text{त्र}$

[मद्रास १९४२

(३) $\text{अ}_1\text{क} \cdot \text{अ}_2\text{ख} \cdot \text{अ}_3\text{ग}$

$= ६४\text{त्रा}^3 \text{कोज्या}^2 \dfrac{\text{क}}{२}\ \text{कोज्या}^2 \dfrac{\text{ख}}{२}\ \text{कोज्या}^2 \dfrac{\text{ग}}{२}$

(४) $\text{अक} \cdot \text{अख} \cdot \text{अग} = ४\ \text{त्रा त्र}^2$

(५) $\dfrac{\text{अक}}{\text{अ}_1\text{क}} + \dfrac{\text{अख}}{\text{अ}_2\text{ख}} + \dfrac{\text{अग}}{\text{अ}_3\text{ग}} = १$

(२३) कखग त्रिकोणांतील खग या बाजूंत च, छ हे बिंदू असे घेतले की

खच = चछ = छग

$\angle \text{खकच} = \text{य}$, $\angle \text{चकछ} = \text{र}$, $\angle \text{छकग} = \text{ल}$ असल्यास

$$\frac{\text{ज्या}(\text{य}+\text{र})\ \text{ज्या}(\text{र}+\text{ल})}{\text{ज्या य ज्या ल}} = ४$$

हें सिद्ध करा. [नागपूर १९४५

(२३) कखग त्रिकोणांतील ग कोणाचा द्विभाजक कखला घ बिंदूंत व परिवृत्ताला छ बिंदूंत छेदतो; तर

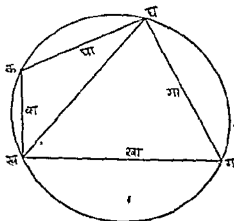
$$\frac{\text{गछ}}{\text{घछ}} = \frac{(\text{का}+\text{खा})^2}{\text{गा}^2}$$

हें दाखवा. [नागपूर १९४३

प्रकरण बारावें

वृत्तीय चौकोण. नियमित बहुभुज

१२·१ वृत्तीय चौकोणाचें क्षेत्रफळ.



आ. १२·१

कखगघ हा क्ष क्षेत्रफळ असणारा एक वृत्तीय चौकोण असून त्याच्या कख, खग, गघ, घक, या बाजू अनुक्रमें का, खा, गा, घा लांबीच्या आहेत.

आता, चौकोण कखगघ = Δकखघ + Δखगघ

$\therefore$ क्ष $= \frac{१}{२}$ का घा ज्या क $+ \frac{१}{२}$ खा गा ज्या ग

$= \frac{१}{२}$ (का घा $+$ खा गा) ज्या क

($\because$ ग $=$ π $-$ क)

$\therefore$ ज्या क $= \frac{२क्ष}{(\text{का घा} + \text{खा गा})}$ ....(१)

पुन्हा, कखघ त्रिकोणांत

खघ^२ $=$ का^{२} $+$ घा^{२} $-$ २का घा कोज्या क

खगघ त्रिकोणांत

खघ^२ $=$ खा^{२} $+$ गा^{२} $-$ २खा गा कोज्या ग

$=$ खा^{२} $+$ गा^{२} $+$ २खा गा कोज्या क

खघ^२ च्या या दोन अर्हा समान मांडून

का^{२} $+$ घा^{२} $-$ २ का घा कोज्या क

$=$ खा^{२} $+$ गा^{२} $+$ २ खा गा कोज्या क

किंवा कोज्या क $= \frac{\text{का}^२ + \text{घा}^२ - \text{खा}^२ - \text{गा}^२}{२\ (\text{का घा} + \text{खा गा})}$ ... (२)

(१) व (२) यांचा वर्ग योग (squaring and adding) करुन,

$$१ = \frac{४\ \text{क्ष}^२}{(\text{का घा} + \text{खा गा})^२} + \frac{(\text{का}^२ + \text{घा}^२ - \text{खा}^२ - \text{गा}^२)^२}{४(\text{का घा} + \text{खा गा})^२}$$

किंवा ४ (का घा $+$ खा गा)^२

$= १६$ क्ष^२ $+$ (का^{२} $+$ घा^{२} $-$ खा^{२} $-$ गा^{२})^२

किंवा $१६ क्ष^२$

$= ४(का घा + खा गा)^२ - (का^२ + घा^२ - खा^२ - गा^२)^२$

$= \left\{२ (का घा + खा गा) + (का^२ + घा^२ - खा^२ - गा^२)\right\}$

$\times \left\{२ (का घा + खा गा) - (का^२ + घा^२ - खा^२ - गा^२)\right\}$

$= \left\{(का + घा)^२ - (खा - गा)^२\right\} \times$

$\left\{(खा + गा)^२ - (का - घा)^२\right\}$

$= (का + घा + खा - गा) (का + घा - खा + गा) \times$
$(खा + गा + का - घा) (खा + गा - का + घा)$

आता, $का + खा + गा + घा = २ सा$ घेऊन,

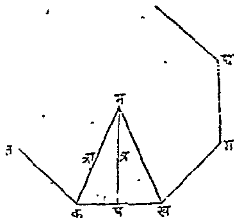
$१६ क्ष^२ = (२सा - २गा) (२सा - २खा) \times$
$(२सा - २घा) (२सा - २का)$

$\therefore क्ष^२ = (सा - का) (सा - खा) (सा - गा) (सा - घा)$

किंवा, $क्ष = \sqrt{(सा - का) (सा - खा) (सा - गा)(सा - घा)}$

१२·२ नियमित बहुभुजः—ज्या बहुभुजाच्या सर्व बाजू समान व सर्व कोन समान असतात त्या बहुभुजाला नियमित बहुभुज म्हणतात.

आता आपण नियमित बहुभुजाचे कोण, व त्याच्या प्रत्येक बाजूने त्याच्या केंद्राशी केलेले कोण काढू.



आ. १२·२

कखगघ...... त हा एक स भुजा असलेला नियमित बहुभुज आहे. क आणि ख या कोनांचे द्विभाजक म बिंदूंत मिळतात. म बिंदु सर्व कोनबिंदूंना जोडल्यास आपणांस क्रमश समान स त्रिकोण मिळतील आणि सर्व बाजूंनी म पाशी आपातित केलेले कोण समान होतील.

$$\therefore\ \angle \text{कमख} = \frac{१}{\text{स}} \times (\text{चार लंबकोण})$$

$$= \frac{\text{२ प्या}}{\text{स}}$$

कमख त्रिकोणांतील कख या पायापाशचे कोण समान आहेत.

$\therefore \angle$ मकख $= \dfrac{\text{प्या} - \angle\text{कमख}}{२} = \dfrac{\text{प्या}}{२} - \dfrac{\text{प्या}}{\text{स}}$

म्हणून, बहुभुजाचा प्रत्येक कोण $= २\angle$मकख

$= \dfrac{(\text{स}-२)\,\text{प्या}}{\text{स}}$

१२·३ नियमित बहुभुजाच्या अंतर्लिखित व परिलिखित वृत्तांच्या त्रिज्या.

आकृति १२·२ मध्यें, कखगघ ...... त हा म हें केंद्र असलेला आणि स बाजू असलेला एक नियमित बहुभुज असून त्याच्या प्रत्येक बाजूची लांबी य आहे. मक, मख जोडून कख ला म पासून मप लंब काढला आहे. नियमित बहुभुजाच्या अंतर्लिखित व परिलिखित वृत्तांच्या त्रिज्या अनुक्रमें मप आणि मक या आहेत. मप आणि मक अनुक्रमें त्र आणि त्रा ने दर्शविल्या आहेत.

आता, मकप त्रिकोणांत,

मप = कप स्प मकप

= कप स्प मकख

पण, वरील अनुच्छेदानें,

$\angle$ मकख $= \dfrac{\text{प्या}}{२} - \dfrac{\text{प्या}}{\text{स}}$

$\therefore$ त्र $= \dfrac{\text{य}}{२}\,\text{स्प}\left(\dfrac{\text{प्या}}{२} - \dfrac{\text{प्या}}{\text{स}}\right)$

$= \dfrac{\text{य}}{२}\,\text{कोस्प}\,\dfrac{\text{प्या}}{\text{स}}$ .... (१)

पुन्हा, $\frac{कप}{मक}$ = कोज्या मकप

किंवा मक = कप व्युत्कोज्या मकप

= कप व्युत्कोज्या मकख

$\therefore$ आ = $\frac{य}{२}$ व्युत्कोज्या $\left(\frac{प्या}{२} - \frac{प्या}{स}\right)$

किंवा आ = $\frac{य}{२}$ व्युज्ज्या $\frac{प्या}{स}$ ....(२)

१२·४· नियमित बहुभुजाचें क्षेत्रफळ.

नियमित बहुभुजाचें क्षेत्रफळ = स × (△मकख चें क्षेत्रफळ)

= स. कप. मप

= स कप. कप स्प मकप

= स कप^{२} स्प मकख

= स $\left(\frac{य}{२}\right)^{२}$ स्प $\left(\frac{प्या}{२} - \frac{प्या}{स}\right)$

= स $\frac{य^{२}}{४}$ कोस्प $\frac{प्या}{स}$ ......(अ)

हें क्षेत्रफळ अंतर्लिखित किंवा परिलिखित वृत्ताच्या त्रिज्येच्या रूपांत पुढे दिल्याप्रमाणे व्यक्त करतां येते.

$$\text{इष्ट क्षेत्रफळ} = \frac{\text{स य}^2}{४}\,\text{कोस्प}\,\frac{\text{प्या}}{\text{स}}$$

$$= \frac{\text{स}}{४} \times \left(\frac{४\,\text{त्र}^2}{\text{कोस्प}^2 \frac{\text{प्या}}{\text{स}}} \right) \text{कोस्प}\,\frac{\text{प्या}}{\text{स}}$$

[अनुच्छेद १२.३ मधील (१) वरून]

$$= \text{स}\,\text{त्र}^2\,\text{स्प}\,\frac{\text{प्या}}{\text{स}} \quad \text{..................(आ)}$$

$$\text{पुन्हा इष्ट क्षेत्रफळ} = \frac{\text{स य}^2}{४}\,\text{कोस्प}\,\frac{\text{प्या}}{\text{स}}$$

$$= \frac{\text{स}}{४} \left(\frac{४\,\text{त्रा}^2}{\text{व्युज्ज्या}^2 \frac{\text{प्या}}{\text{स}}} \right) \text{कोस्प}\,\frac{\text{प्या}}{\text{स}}$$

[अनु० १२·३ मधील (२) वरून]

$$= \text{स}\,\text{त्रा}^2\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{प्या}}{\text{स}}\,\text{ज्या}\,\frac{\text{प्या}}{\text{स}}$$

$$= \frac{\text{स}}{२}\,\text{त्रा}^2\,\text{ज्या}\,\frac{२\,\text{प्या}}{\text{स}} \quad \text{..............(इ)}$$

१२·५ वृत्ताचें क्षेत्रफळ:

नियमित वहुभुजाच्या बाजूंची संख्या अनियतपणें वाढविल्यास बहुभुजाचें परिमाप सीमांतीं त्याच्या परिलिखित वृत्ताच्या परिघासमान होतें. म्हणून जेव्हां बहुभुजाच्या बाजूंची

संख्या अनंत होते तेव्हां त्याचें क्षेत्रफळ त्याच्या परिलिखित वृत्ताच्या क्षेत्रफळासमान होतें.

आता स बाजू असणाऱ्या व त्रा ही परिलिखित वृत्ताची त्रिज्या असलेल्या बहुभुजाचें क्षेत्रफळ $\frac{स}{२}$त्रा²ज्या$\frac{२प्या}{स}$ आहे.

∴ त्रा त्रिज्या असलेल्या वृत्ताचें क्षेत्रफळ

$$= \underset{स \to \infty}{सी}\left\{\frac{स}{२}त्रा^२ज्या\frac{२प्या}{स}\right\}$$

$$= त्रा^२\underset{स \to \infty}{सी}\left\{प्या.\frac{स}{२प्या}ज्या\frac{२प्या}{स}\right\}$$

$$= प्या\,त्रा^२\underset{स \to \infty}{सी}\left\{\frac{ज्या\left(\frac{२प्या}{स}\right)}{\left(\frac{२प्या}{स}\right)}\right\}$$

$$= प्या\,त्रा^२\underset{\left(\frac{२प्या}{स}\right) \to 0}{सी}\left\{\frac{ज्या\left(\frac{२प्या}{स}\right)}{\left(\frac{२प्या}{स}\right)}\right\}$$

$$= प्या\,त्रा^२ \qquad \text{(अनु० ३·९१ वरून)}$$

म्हणून, वृत्ताचें क्षेत्रफळ = प्या × (त्रिज्येचा वर्ग)

१२·६ उदाहरण. $\sqrt{३}$ पाद त्रिज्या असलेल्या वृत्तास परिलिखित करणाऱ्या नियमित षड्भुजाचें (hexagon) परिमाप व क्षेत्रफळ काढा.

दिलेल्या षड्भुजाची बाजू य आहे असें समजा.

आता $त्र = \frac{य}{२}$ कोस्प $\frac{\pi}{स}$ या संबंधावरून

$$\sqrt{३} = \frac{य}{२} \text{ कोस्प } \frac{\pi}{६}$$

$$= \frac{य}{२} \sqrt{३}$$

$\therefore$ य = २ पाद

$\therefore$ षड्भुजाचें परिमाप = (२ × ६) पाद = १२ पाद

शिवाय, षड्भुजाचें क्षेत्रफळ

$$= \frac{६ य^{२}}{४} \text{ कोस्प } \frac{\pi}{६}$$

[१२·४ अनुच्छेदांतील (अ) वरून]

$$= ६ \cdot \frac{४}{४} \cdot \sqrt{३}$$

$= ६\sqrt{३}$ वर्ग पाद

उदाहरणसंग्रह १७

(१) स बाजू असलेल्या एका नियमित बहुभुजाच्या अंतर्लिखित व परिलिखित वृत्तांच्या त्रिज्या अनुक्रमें त्र आणि त्रा आहेत व त्या बहुभुजाची बाजू य आहे.

तर $\frac{\text{प्रा}}{\text{प्र}} = \frac{१}{\text{कोज्या} \frac{\text{व्या}}{\text{स}}}$ व $\text{प्रा} + \text{प्र} = \frac{\text{य}}{२} \text{कोस्प} \frac{\text{व्या}}{२\text{स}}$

हें सिद्ध करा.

(२) ४ पाद त्रिज्येच्या वृत्तांत अंतर्लिखित केलेल्या नियमित पड्भुजाचें परिमाप व क्षेत्रफळ काढा.

(३) एका समायताचें (square) परिमाप एका नियमित अष्टभुजाच्या (octagon) परिमापाइतकें आहे. तर त्यांचीं क्षेत्रफळें २: $\sqrt{२}$+१ या प्रमाणांत आहेत हें सिद्ध करा.

(४) कोणत्याहि वृत्तास परिलिखित करणाऱ्या व त्याला अंतर्लिखित होणाऱ्या नियमित अष्टभुजांच्या क्षेत्रफळांची निष्पत्ति २$\sqrt{२}$ ($\sqrt{२}$−१) समान आहे हें सिद्ध करा. [नागपूर १९३२

(५) एका नियमित षड्भुजानें परिलिखित असलेल्या वृत्तांत एक समभुजत्रिकोण अंतर्लिखित केला. तर परिलिखित षड्भुज, दिलेलें वृत्त व अंतर्लिखित त्रिकोण यांचीं परिमापें ४: $\frac{२\text{व्या}}{\sqrt{३}}$: ३ या प्रमाणांत असून त्यांचीं क्षेत्रफळें ८ : $\frac{४\text{व्या}}{\sqrt{३}}$: ३ या प्रमाणांत आहेत हें सिद्ध करा.

(६) एका वृत्तांत अंतर्लिखित केलेल्या नियमित पंचभुज, षड्भुज व दशभुज (decagon) यांच्या बाजूंच्या लांबी अनुक्रमें त, थ आणि द आहेत. तर सिद्ध करा की,

$$त^2 = थ^2 + द^2$$ [मैसूर १९४३

(७) भुजांची संख्या समान असलेले दोन नियमित बहुभुज एका वृत्तास अंतर्लिखित व परिलिखित करतात. तर सिद्ध करा की

$$\frac{(\text{परिलिखित बहुभुजाचें क्षेत्रफळ})}{(\text{परिलिखित बहुभुजाची परित्रिज्या})}$$

= (अंतर्लिखित बहुभुजाचें सामिपरिमाप)
[मद्रास १९४१

प्रकरण तेरावें

छेदा

१३.१ परिभाषा:— क ही कोणतीहि संख्या असून य आणि त अशा दोन संख्या आहेत की $क^{य} = त$; य ला क आधारावरील त ची छेदा (logarithm) म्हणतात. हें $छे_{क} त$ असें लिहितात. ($छे_{क} त$ ला छेदा त आधार क असें वाचतात.)

म्हणून कोणत्याहि संख्येची दिलेल्या आधारावरील छेदा, ती संख्या मिळण्यासाठी आधाराचें ज्या घातांकावर (index of the power) उच्छ्रायन करावें लागतें, त्या घातांकासमान असते.

उदाहरणार्थ, $६^{२} = ३६$ $\therefore २ = छे_{६} ३६$

$१०^{३} = १०००$ $\therefore ३ = छे_{१०} १०००$

$२५^{-१} = \cdot ०४$ $\therefore -१ = छे_{२५} \cdot ०४$

एकाच संख्येच्या निरनिराळ्या आधारांवरील छेदा निरनिराळ्या असतात हें लक्षांत ठेवावें.

उदाहरणार्थ, $३^{४} = ८१$ व $९^{२} = ८१$

$\therefore$ $छे_{३}८१ = ४$ व $छे_{९}८१ = २$

१३·२ कांही विशिष्ट छेदा.

(१) क कोणतीहि परिमित राशि असल्यास $क^{०} = १$ हा समीकार नेहमी सत्य असतो.

$\therefore छे_{क}१ = ०.$

म्हणजे कोणत्याहि आधारावरील १ ची छेदा शून्य असते.

(२) पुन्हा क ही कोणतीहि राशि असल्यास,

$क^{१} = क$

$\therefore छे_{क}क = १$

म्हणजे कोणत्याहि संख्येची छेदा, तीच संख्या आधार असल्यास, १ समान असते.

(३) जर $क > १$, तर $क^{\infty} = \infty$

$\therefore छे_{क}\infty = \infty, \quad क > १$

(४) जर $क > १$, तर $क^{-\infty} = ०$

$\therefore छे_{क}० = -\infty, \quad क > १$

१३·३ छेदांचे मूलभूत नियम.

क, य, र कोणत्याहि तीन राशी असल्यास त्यांमधे खालील घातांक-नियम (laws of indices) सत्य असतात हें आपणांस बैजिकीवरून (algebra) माहीत आहे.

(१) $क^{य} \times क^{र} = क^{य+र}$

(२) $\frac{क^{य}}{क^{र}} = क^{य-र}$

(३) $(क^{य})^{र} = क^{यर}$

यांच्यासारखेच तीन मूलभूत छेदा-नियम खाली दिले आहेत.

क, म, न या कोणत्याहि तीन वास्तविक (real) राशी असल्यास

(१) $छे_{क}(मन) = छे_{क}म + छे_{क}न$

(२) $छे_{क}\left(\frac{म}{न}\right) = छे_{क}म - छे_{क}न$

(३) $छे_{क}(म^{न}) = न\ छे_{क}म$

१३·३१ (१) $छे_{क}(मन) = छे_{क}म + छे_{क}न$ हें सिद्ध करणें.

समजा $छे_{क}म = य$ व $छे_{क}न = र$.

$\therefore$ म = क^{य} व न = क^{र}

(परिभाषेवरून)

$\therefore$ मन = क^{य}.क^{र}

= क$^{य+र}$

म्हणून, परिभाषेनुसार

छे$_{क}$ (मन) = य + र

= छे$_{क}$म + छे$_{क}$न

म्हणजे दोन राशींच्या गुणनफलाची दिलेल्या आधारावरील छेदा, त्या राशींच्या त्याच आधारावरील छेदांच्या योगासमान असते.

उपसाध्य :— छे$_{क}$(त. थ. द ...) = छे$_{क}$त + छे$_{क}$थ + छे$_{क}$द + ...

१३·२२ (२) छे$_{क}$ $\left(\frac{म}{न}\right)$ = छे$_{क}$म − छे$_{क}$न सिद्ध करणे.

समजा छे$_{क}$म = य आणि छे$_{क}$न = र

म्हणून, परिभाषेवरून,

म = क^{य}, न = क^{र}

आता $\frac{म}{न} = \frac{क^{य}}{क^{र}}$

= क$^{य-र}$

$\therefore$ छे$_{क}$ $\left(\frac{म}{न}\right)$ = य − र

= छे$_{क}$म − छे$_{क}$न

१३.३ छेदांचे मूलभूत नियम.

क, य, र कोणत्याहि तीन राशी असल्यास त्यांमधे खालील घातांक-नियम (laws of indices) सत्य असतात हें आपणांस बैजिकीवरून (algebra) माहीत आहे.

(१) $क^य \times क^र = क^{य+र}$

(२) $\frac{क^य}{क^र} = क^{य-र}$

(३) $(क^य)^र = क^{य र}$

यांच्यासारखेच तीन मूलभूत छेदा नियम खाली दिले आहेत.

क, म, न या कोणत्याहि तीन वास्तविक (real) राशी असल्यास

(१) $छे_क (मन) = छे_क म + छे_क न$

(२) $छे_क \left(\frac{म}{न}\right) = छे_क म - छे_क न$

(३) $छे_क (म^न) = न\ छे_क म$

१३.३१ (१) $छे_क (मन) = छे_क म + छे_क न$

समजा $छे_क म = य$ व $छे_क न$

$\therefore$ म = क^{य} व न = क^{र}

(परिभाषेवरून)

$\therefore$ मन = क^{य}.क^{र}

= क$^{य+र}$

म्हणून, परिभाषेनुसार

छे$_{क}$ (मन) = य + र

= छे$_{क}$म + छे$_{क}$न

म्हणजे दोन राशींच्या गुणनफलाची दिलेल्या आधारावरील छेदा, त्या राशींच्या त्याच आधारावरील छेदांच्या योगासमान असते.

उपसाध्य :— छे$_{क}$(त. थ. द ...) = छे$_{क}$त + छे$_{क}$थ + छे$_{क}$द + ...

१३·३२ (२) छे$_{क}$ $\left(\frac{म}{न}\right)$ = छे$_{क}$म − छे$_{क}$न सिद्ध करणें.

समजा छे$_{क}$म = य आणि छे$_{क}$न = र

म्हणून, परिभाषेवरून,

म = क^{य}, न = क^{र}

आता $\frac{म}{न} = \frac{क^{य}}{क^{र}}$

= क$^{य-र}$

$\therefore$ छे$_{क}$ $\left(\frac{म}{न}\right)$ = य − र

= छे$_{क}$म − छे$_{क}$न

म्हणजे, दोन राशींच्या भागफलाची (quotient) छेद त्यांच्या छेदांच्या वियोगासमान असते.

उपसाध्य १. $छे_{क} \frac{१}{त} = - छे_{क} त$

उपसाध्य २.

$$छे_{क} \left(\frac{त \times थ \times द \times \ldots}{प \times फ \times ब \times \ldots} \right) = (छे_{क} त + छे_{क} थ + छे_{क} द + \ldots) - (छे_{क} प + छे_{क} फ + छे_{क} ब + \ldots)$$

१२·२२ (३) $छे_{क} (म^{न}) = न \; छे_{क} म$ सिद्ध करणें.

समजा $छे_{क} म = य \quad \therefore \quad म = क^{य}$

आता $म^{न} = (क^{य})^{न}$

$= क^{नय}$

$\therefore \quad छे_{क} (म^{न}) = नय$

$= न \; छे_{क} म$

म्हणजे, एखाद्या घात (power) युक्त संख्येची छेदा, त्या संख्येची छेदा आणि तिचा घातांक यांच्या गुणनफलाइतकी असते.

उपसाध्य.

$$छे_{क}(त^{य} थ^{र} द^{ल} \ldots) = य\, छे_{क} त + र\, छे_{क} थ + ल\, छे_{क} द + \ldots$$

१३·३४ आता आपण

$$छे_{क} म = छे_{ख} म \times छे_{क} ख$$

हें सिद्ध करूं.

समजा $छे_{ख} म = य$ आणि $छे_{क} ख = र$

$\therefore\ म = ख^{य}$ आणि $ख = क^{र}$

$\therefore\ म = ख^{य} = (क^{र})^{य} = क^{यर}$

म्हणून, परिभाषेनुसार,

$$छे_{क} म = यर$$

$$= (छे_{ख} म)\,(छे_{क} ख)$$

हें सूत्र, $छे_{ख} म = \dfrac{छे_{क} म}{छे_{क} ख}$ असेंहि लिहितां येतें.

यावरून दोन राशींच्या एकाच आधारावरील छेदा माहीत असल्यास त्यांपैकी एका संख्येची दुसरी संख्या आधार धरून छेदा काढतां येते.

उपसाध्य— वरील सूत्रांत म = क घेऊन,

$$छे_{क} क = छे_{ख} क \times छे_{क} ख$$

पण $छे_{क} क = १$

$$\therefore\ १ = छे_{ख} क \times छे_{क} ख$$

किंवा $छे_{ख} क = \dfrac{१}{छे_{क} ख}$

१३·४ छेदांची सामान्य पद्धति किंवा दशच्छेदापद्धति.

नेहमी उपयोगांत येणाऱ्या छेदांच्या पद्धतींत १० हा आधार घेतलेला असतो, व तिला छेदांची सामान्य पद्धति किंवा दशच्छेदापद्धति (common system of logarithms) म्हणतात. १० हा आधार न लिहितां तो अध्याहृत समजण्याचा प्रघात आहे. १० हा आधार घेऊन संख्यांच्या छेदा काढल्या असून त्या सारणीच्या रूपांत एकत्रित केल्या आहेत. या सारण्यांच्या साह्याने कोणत्याहि संख्येची छेदा सहजगत्या काढतां येते; उलटपक्षीं जर एखाद्या संख्येची छेदा माहीत असेल तर ती संख्याहि काढतां येते.

१३·५ लक्षण व दशमिकांश.

कोणत्याहि छेदेच्या अनुकल (integral) भागास छेदेचें लक्षण (characteristic) व तिच्या दशमिक (decimal) भागास छेदेचा दशमिकांश (mantissa) म्हणतात.

एखाद्या संख्येची छेदा ऋण असून अंशतः अनुकल व अंशतः दशमिक असेल तर अनुकल भागांत योग्य तो बदल करून दशमिक भाग नेहमी धन करण्याचा प्रघात आहे. म्हणून कोणत्याहि संख्येच्या छेदेचा दशमिकांश नेहमी धन असतो.

उदाहरणार्थ, एखाद्या संख्येची छेदा $-४·४५६१$ असल्यास ती $-५+·५४३९$ किंवा संक्षेपतः $\bar{५}·५४३९$ अशी लिहितात. लक्षणावरील शिरोदंड (bar) केवळ लक्षणच ऋण असून दशमिकांश धन असतो हें दर्शवितो.

१३·५१ कोणत्याहि संख्येच्या दशच्छेदेचें लक्षण निरीक्षण करून कसें लिहितां येतें हें आता आपण दाखवूं.

(१) प्रथम समजा की संख्या १ पेक्षा मोठी आहे.

परिभाषेवरून, $१०^{०}=१$ ∴ छे $१=०$

$१०^{१}=१०$ ∴ छे $१०=१$

∴ $१०^{२}=१००$ ∴ छे $१००=२$

$१०^{३}=१०००$ ∴ छे $१०००=३$

....

यावरून १ व १० मधील कोणत्याहि संख्येची छेदा ० आणि १ मधे असते व म्हणून ती दशामिक भिन्न असून तिचें लक्षण शून्य आहे. १० व १०० मधील कोणत्याहि संख्येची छेदा १ आणि २ मधे असली पाहिजे व म्हणून तिचें लक्षण १ होईल. तसेंच १०० आणि १००० मधे असलेल्या कोणत्याहि संख्येच्या छेदेचें लक्षण २ असलें पाहिजे. यावरून आपणांस पुढील नियम मिळतो :—

१ पेक्षा मोठी असलेल्या कोणत्याहि संख्येच्या छेदेचें लक्षण धन असून तिच्या अनुकल भागांतील अंकांच्या संख्येपेक्षा १ ने कमी असते.

उदाहरण. ३९७·४ च्या अनुकल भागांत तीन अंक आहेत. म्हणून ३९७·४ च्या छेदेचें लक्षण २ आहे.

छे ५०·१, छे २·१२३, छे ३१५५ यांची लक्षणें अनुक्रमें १,०,३ आहेत.

(२) आता समजा की संख्या १ पेक्षा लहान आहे.

परिमापैयकन, $१०^{०} = १ \quad \therefore \text{छे}\, १ = ०$

$$१०^{-१} = \frac{१}{१०} = \cdot १ \quad \therefore \text{छे}\, \cdot १ = -१$$

$$१०^{-२} = \frac{१}{१०^{२}} = \cdot ०१ \quad \therefore \text{छे}\, \cdot ०१ = -२$$

$$१०^{-३} = \frac{१}{१०^{३}} = \cdot ००१ \quad \therefore \text{छे}\, \cdot ००१ = -३$$

....

म्हणून १ व ·१ मधे असलेल्या कोणत्याहि संख्येची छेदा ० आणि −१ मधे असते व म्हणून ती −१+एखादा दशमिकया समान आहे; अर्थात् तिचें लक्षण $\bar{१}$ असते. ·१ व ·०१ मधील कोणत्याहि संख्येची छेदा −१ आणि −२ यामधे आहे व म्हणून ती −२+कोणतातरी दशमिक यासमान आहे; म्हणजेच तिचें लक्षण $\bar{२}$ आहे. तसेंच, ·०१ व ·००१ मधील कोणत्याहि संख्येचें छेदा-लक्षण $\bar{३}$ असतें. यावरून पुढील नियम मिळतो:—

१ पेक्षा लहान असलेल्या कोणत्याहि संख्येचें छेदा-लक्षण ऋण असून, संख्येने, दशामिक बिंदूनंतर लगेच येणाऱ्या शून्यांच्या संख्येपेक्षा १ ने मोठें असतें.

उदाहरण. छे·७१२८, छे·०००२६८१, छे·०४६२, छे·००२०२ यांचीं लक्षण अनुक्रमें $\bar{१}$, $\bar{४}$, $\bar{२}$, $\bar{३}$ आहेत.

१३५२ आता आपण दशमिकांशाविषयी पुढील प्रमेय सिद्ध करूं.

केवळ दशमिक बिंदूंचीच स्थानें निरनिराळीं असलेल्या व तेच अंक एका ठराविक क्रमांत येऊन बनलेल्या संख्यांच्या छेदांचे दशमिकांश एकच असतात.

समजा क आणि ख या संख्या तेच अंक एका ठराविक क्रमांत येऊन बनलेल्या आहेत पण त्यांच्या दशमिक बिंदूंचीं स्थानें मात्र निरनिराळीं आहेत.

स एखादा धन वा ऋण पूर्णांक असल्यास,

$$ख = क.१०^{स}$$

$$\therefore छे ख = छे (क.१०^{स})$$
$$= छे क + छे १०^{स}$$
$$= छे क + स छे १०$$
$$= छे क + स$$

$$\therefore छे ख - छे क = स$$

यावरून छे क आणि छे ख यांमधील फरक एका अनुकल संख्येइतका आहे, म्हणून त्यांचा दशमिकांश एकच आहे.

पुढील उदाहरणानें हें अधिक स्पष्ट होईल.

समजा छे ४८९२ = ३·६८९५ दिलेली आहे.

$$\therefore \text{छे } ४८९\cdot२ = \text{छे } \frac{४८९२}{१०}$$

$$= \text{छे } ४८९२ - \text{छे } १०$$

$$= ३\cdot६८९५ - १$$

$$= २\cdot६८९५$$

$$\text{छे } ४\cdot८९२ = \text{छे } \frac{४८९२}{१०००}$$

$$= \text{छे } ४८९२ - \text{छे } १०००$$

$$= ३\cdot६८९५ - ३$$

$$= \cdot६८९५$$

$$\text{छे } \cdot००४८९२ = \text{छे } \left(\frac{४८९२}{१०^{६}}\right)$$

$$= \text{छे } ४८९२ - \text{छे } १०^{६}$$

$$= ३\cdot६८९५ - ६$$

$$= \bar{३}\cdot६८९५$$

$$\text{छे } ४८९२०० = \text{छे} (४८९२ \times १००)$$

$$= \text{छे } ४८९२ + \text{छे } १००$$

$$= ३\cdot६८९५ + २$$

$$= ५\cdot६८९५$$

यावरून केवळ ४, ८, ९, २ हेच अंक ४८९२ या क्रमाने येऊन बनलेल्या पण त्यांच्या दशमिक बिंदूचीं स्थानें भिन्न असलेल्या सर्व संख्यांचे छेदा-दशमिकांश एकच असतात हें दिसून येईल. वर दिलेल्या प्रत्येक संख्येच्या छेदेचें लक्षण

मागील अनुच्छेदांत दिलेले नियम लावून तावडतोब मिळवितां येते हें विद्यार्थ्यांनी लक्षांत ठेवावें.

१३·६ छेदांच्या व प्रतिच्छेदांच्या (antilogarithm) सारण्या.

कैंसलच्या छेद-सारणीच्या साह्यानें १ पासून १०००० पर्यंत कोणत्याहि संख्येची छेद काढतां येते. या सारणींत (चार दशमिक स्थानांपर्यंत बरोबर असलेले) केवळ दशमिकांश असतात; पण दशमिक बिंदु लिहिलेला नसतो. १३·५१ या अनुच्छेदांत दिलेल्या नियमांनुसार लक्षण काढून लिहावें लागतें.

१३·६१ उदाहरण. छे ·२३८७ काढा.

निरीक्षणानें छे ·२३८७ चें लक्षण $\bar{1}$ आहे.

∴ छे ·२३८७ = $\bar{1}$ + छे २३८७ चा दशमिकांश.

पुस्तकाच्या शेवटी दिलेल्या छेद-सारणीच्या पानावरील पहिल्या स्तंभांतील २३ व पहिल्या ओळींतील ८ या आकड्यांकडे दृष्टि वळवा. २३ च्या समोर व ८ च्या खालीं ३७६६ हा आकडा आहे. २३८७ या दिलेल्या संख्येंतील ७ या चवथ्या अंकाकरता वियोग (difference) स्तंभ पहा. त्यांत ७ च्या खालीं व २३ च्या समोर १३ हा आकडा आहे. हा वियोग ३७६६ मध्ये मिळविल्यानंतर ३७७९ हा आकडा मिळतो. म्हणून इष्ट दशमिकांश ·३७७९ आहे.

∴ छे ·२३८७ = १̄.३७७९.

अभ्यास. (१) छे ·०२८७, (२) छे ६६६६,
(३) छे २५.४२ काढा.

१३·६२ छेदा दिली असतांना तिची संवादी संख्या काढणें हा उलटा प्रश्न अनेकदा उद्भवतो. प्रतिच्छेदासारणीचा उपयोग करून तो सोडवितां येतो.

उदाहरण. २·२८६२ ही छेदा असलेली संख्या काढा.

यांत ·२८६२ हा दशमिकांश आहे. जवळच दिलेल्या प्रतिच्छेदासारणीच्या पानावरील पहिल्या स्तंभांतील ·२८ व पहिल्या ओळींतील ६ या आकड्यांकडे दृष्टि फेका. ·२ च्या समोर व ६ च्या खाली १९३२ हा आकडा आहे. ·२८६२ या दशमिकांशांतील २ या चवथ्या अंकाकरता वियोगस्तंभ पहा. त्यांत ·२८ च्या समोर व २ च्या खाली १ लिहिलेला आहे. हा वियोग १९३२ मध्ये मिळवून आपणांस १९३३ हा आकडा मिळतो.

म्हणून १९३३ या संख्येचा ·२८६२ या दशमिकांशाशीं संबंध प्रस्थापित होतो.

परंतु दिलेलें लक्षण २ आहे. म्हणून इष्ट संख्येंतील दशमिक बिंदु तीन अंकांनंतर आला पाहिजे.

म्हणून १९३·३ ही इष्ट संख्या आहे.

अभ्यास. (१) १̄·१७६२, (२) ·८५०१, (३) ३·४ या छेदा असलेल्या संख्या काढा.

१३·७ त्रिकोणमितीय निष्पत्तींच्या सारण्या.

०° पासून ९०° पर्यंत एक एक कलेने कोण वाढवून मिळणाऱ्या सर्व कोणांच्या ज्या, कोटिज्या व स्पर्शज्या देणाऱ्या सारण्या आहेत. अशा सारण्यांना प्राकृत (natural) ज्या-सारणी, प्राकृत कोटिज्या-सारणी, व प्राकृत स्पर्शज्या-सारणी म्हणतात

कधीकधी आपणांस त्रिकोणमितीय निष्पत्तींनी युक्त असलेल्या व्यंजकाचा अर्हा काढावी लागते.

उदाहरणार्थ, $य = \frac{ज्या २०°३५' \times कोज्या ५४°४०'}{स्प ३३°२४'}$

∴ छेय = छेज्या २०°३५′ + छेकोज्या ५४°४०′ − छेस्प ३३°२४′

छेज्या २०°३५ सारख्या त्रिकोणमितीय निष्पत्तींच्या छेदा काढण्यासाठी आपण प्राकृत ज्या, कोटिज्या वगैरेंच्या सारण्यांवरून प्रथम त्या निष्पत्तींच्या अर्हा काढून नंतर त्या अर्हांच्या छेदा काढू शकतो. पण असे करण्यांत आपणांस दोन निरनिराळ्या सारण्या पहाव्या लागतील. हे दुप्पट श्रम वांचविण्यासाठी ०° ते ९०° पर्यंत सर्व कोणांच्या ज्या, कोटिज्या, स्पर्शज्या यांच्या छेदा काढून त्या वेगळ्या सारण्यांच्या रूपांत मांडल्या आहेत. या सारण्यांना छेदा ज्या-सारणी, छेदा-कोटिज्या सारणी, व छेदा स्पर्शज्या-सारणी म्हणतात.

१३.८ संख्यात्मक गणनांमध्य (calculations) छेदांच्या साह्याने, गुणाकाराचे योगांत व भागाकाराचे वियोगांत सुलभतेने परिवर्तन करता येते. ही छेदांची विशेष उपयुक्तता आहे. तसेंच कोणत्याहि संख्येचे एखाद्या घातास उन्नयन करणें किंवा तिचें मूळ (root) काढणें या क्लिष्ट क्रियांचे छेदांच्या साह्याने केवळ गुणाकार व भागाकार या क्रियांत रूपांतर करता येते. हें खालील उदाहरणांवरून स्पष्ट होईल.

उदाहरण१— ८३·२४ च्या ११ व्या मूळाचें ठोकळ मान काढा.

समजा $य = (८३·२४)^{\frac{१}{११}}$

$\therefore$ छे $य = \frac{१}{११}$ छे ८३·२४

छेदासारणीवरून,

छे ८३·२४ = १·९२०३

$\therefore$ छे $य = \frac{१}{११} \times १·९२०३$

= ·१७४६ स्थूल मानाने.

प्रतिच्छेदासारणीवरून,

·१७४६ = छे १·४९५

$\therefore$ छे य = छे १·४९५

किंवा य = १·४९५

उदाहरण २.

$$\sqrt[५]{\frac{(५९)^{७} \times \sqrt[४]{७२}}{(९३)^{३}\ \sqrt[३]{१९}}}$$ चें मान काढा.

समजा य हें इष्ट मान आहे.

$$\text{छे}\,य = \text{छे}\left\{\frac{(५९)^{७}(७२)^{\frac{१}{४}}}{(९३)^{३}(१९)^{\frac{१}{३}}}\right\}^{\frac{१}{५}}$$

$$= \frac{१}{५}\left[\text{छे}(५९)^{७} + \text{छे}(७२)^{\frac{१}{४}} - \text{छे}(९३)^{३} - \text{छे}(१९)^{\frac{१}{३}}\right]$$

$$= \frac{१}{५}\left[७\,\text{छे}\,५९ + \frac{१}{४}\text{छे}\,७२ - ३\,\text{छे}\,९३ - \frac{१}{३}\text{छे}\,१९\right]$$

छेदासारणीने, छे५९ = १·७७०९
छे७२ = १·८५७३
छे९३ = १·९६८५
छे१९ = १·२७८८

$$\therefore \text{छे}\,य = \frac{१}{५}\left[(७ \times १·७७०९) + (\frac{१}{४} \times १·८५७३) - (३ \times १·९६८५) - (\frac{१}{३} \times १·२७८८)\right]$$

$$= \frac{१}{५} \times ६·५२८९$$

= १·३०५८ स्थूलमानाने.

= छे २०·२२ प्रतिच्छेदासारणीने.

$\therefore \quad \text{य} = \text{२०·२२}$

उदाहरण ३. सिद्ध कराः—

$$\text{६ छे}\frac{\text{१०}}{\text{९}} + \text{२ छे}\frac{\text{२४}}{\text{२५}} - \text{छे}\frac{\text{३}}{\text{५}} + \text{३ छे}\frac{\text{८१}}{\text{८०}} = \text{छे २}$$

$$\text{वामपक्ष} = \text{छे}\left(\frac{\text{१०}}{\text{९}}\right)^{\text{६}} + \text{छे}\left(\frac{\text{२४}}{\text{२५}}\right)^{\text{२}} - \text{छे}\left(\frac{\text{३}}{\text{५}}\right) + \text{छे}\left(\frac{\text{८१}}{\text{८०}}\right)^{\text{३}}$$

$$= \text{छे}\left[\frac{\left(\frac{\text{१०}}{\text{९}}\right)^{\text{६}}\left(\frac{\text{२४}}{\text{२५}}\right)^{\text{२}}\left(\frac{\text{८१}}{\text{८०}}\right)^{\text{३}}}{\left(\frac{\text{३}}{\text{५}}\right)}\right]$$

$$= \text{छे}\left\{\left(\frac{\text{५}\times\text{२}}{\text{३}^{\text{२}}}\right)^{\text{६}} \times \left(\frac{\text{३}\times\text{२}^{\text{३}}}{\text{५}^{\text{२}}}\right)^{\text{२}} \times \left(\frac{\text{३}^{\text{४}}}{\text{५}\times\text{२}^{\text{४}}}\right)^{\text{३}} \times \frac{\text{५}}{\text{३}}\right\}$$

$$= \text{छे}\left\{\frac{\text{५}^{\text{७}}.\text{२}^{\text{१२}}.\text{३}^{\text{१४}}}{\text{३}^{\text{१३}}.\text{५}^{\text{७}}.\text{२}^{\text{१२}}}\right\}$$

$$= \text{छे ३} = \text{दक्षिणपक्ष}$$

अन्यथाः—

$$\text{वामपक्ष} = \text{६ छे}\left(\frac{\text{५.२}}{\text{३}^{\text{२}}}\right) + \text{२ छे}\left(\frac{\text{२}^{\text{३}}.\text{३}}{\text{५२}}\right) - \text{छे}\left(\frac{\text{३}}{\text{५}}\right) + \text{३ छे}\left(\frac{\text{३}^{\text{४}}}{\text{२}^{\text{४}}.\text{५}}\right)$$

$$= \text{६ (छे५ + छे२ − २ छे ३)} + \text{२ (३ छे २ + छे ३ − २ छे ५)} - \text{(छे३ − छे५)} + \text{३ (४ छे ३ − ४ छे २ − छे ५)}$$

$$= \text{छे ३} = \text{दक्षिणपक्ष}$$

उदाहरण ४. ३७ चा ७ या आधारावरील छेदा काढा.

१३·२४ या अनुच्छेदानुसार,

$$\text{छे}_{\text{७}}\text{३७} = \text{छे}_{\text{१०}}\text{३७} \times \text{छे}_{\text{७}}\text{१०}$$

$$= \frac{\text{छे}_{\text{१०}}\text{३७}}{\text{छे}_{\text{१०}}\text{७}}$$

$$= \frac{\text{१·५६८२}}{\text{·८४५१}} \quad \text{छेदासारणी वापरून.}$$

$$= \text{१·८५५६}$$

उदाहरण ५. पुढील समीकार ठोकळ मानाने सोडवा.

$$\frac{\text{२}^{\text{३य}}}{\text{११}^{\text{२य+१}}} = \text{१०}^{\text{य−१}}$$

दोन्ही बाजूंच्या छेदा घेऊन,

$$\text{२य छे २} - (\text{२य}+\text{१}) \text{ छे ११} = (\text{य}-\text{१}) \text{ छे१०} = (\text{य}-\text{१})$$

$$\text{य} = \frac{\text{१} - \text{छे ११}}{\text{१} + \text{२छे ११} - \text{३छे२}}$$

$$= \frac{\text{१} - \text{१·०४१४}}{+\text{२·० ८२८} - \text{१·४३१३}}$$

छेदासारणीने.

$$= \frac{-\text{० ०४१४}}{\text{१.६५१५}}$$

$$= -\text{·०२५०७ जवळजवळ}$$

१३·९ अनुपाती भागांचा प्रनियम.

केंसलच्या छेदासारणीच्या साह्याने कोणत्याहि चार अंकी संख्येची छेदा काढतां येते. परंतु जर आपणांस २५६३ व २५६४ या लागोपाठ येणाऱ्या संख्यांमधील एखाद्या संख्येची (उदाहरणार्थ २५६३·६ ची) छेदा काढावयाची असेल तर त्याकरिता

"संख्येच्या छेदेंतील वाढ त्या संख्येंतील वाढीशीं अनुपाती असते"

या अनुपाती भागांच्या प्रनियमाचा (principle) उपयोग करावा लागतो.

पुढील उदाहरणांवरून या प्रनियमाचा उपयोग कसा करतात हें दिसून येईल.

उदाहरण १. छे ७२·३५७ काढा.

प्रथम आपण ७२३५ व ७२६३ यांमध्यें असलेल्या ७२३५·७ या संख्येची छेदा काढूं.

छेदासारणीने, छे ७२३६ = ३·८५९५
छे ७२३५ = ३·८५९४

∴ छे ७२३६ − छे ७२३५ = ·०००१

यावरून, ७२३५ या संख्येंत १ ने वाढ झाली तर तिच्या छेदांत ·०००१ इतकी वाढ होते.

म्हणून अनुपाती भागांच्या प्रनियमाने, संख्या ·७ ने वाढली तर तिची छेदा

·७ × ·०००१ = ·०००७ ने वाढेल.

∴ छे ७२३५७ = ३·८५९४ + ·००००७

= ३·८५९४७

∴ छे ७२·३५७ = १·८५९४७

उदाहरण २. कोज्या ३१°२३′ = ·८५५२ दिली आहे, व १′ करिता फरक = ·००१७ दिला आहे; तर कोज्या ३१°२३′४०″ काढा.

१′ म्हणजे ६०″ करिता फरक = ·००१७

∴ ४०″ करिता फरक = $\frac{४०}{६०}$ × ·००१७

= ·००११ जवळजवळ

आता, जसजसा कोण वाढतो तसतशी कोज्या कमी कमी होते.

∴ कोज्या ३१°२३′४०″ = ·८५५२ − ·००११

= ·८५४१

उदाहरणसंग्रह १८

(१) छे ७ = ·८४५१ व छे १९ = १·२७८८ दिल्या आहेत;
तर (१) छे १·३३,
(२) छे २४०·१,
(३) छे $\sqrt[५]{१३३}$,
व (४) छे $\sqrt[३]{·००३६१}$
यांच्या अर्हा काढा.

(२) ·०८९, २·०५, ·०००03, $\sqrt[४]{३६९६}$ व $(५२४३७)^{\frac{१}{३}}$
यांच्या छेदांचीं लक्षणें कोणतीं आहेत ?

(३) ०·१७५६ ला ०·०८०२३ ने गुणा व भागा.

(४) (१) $३३·३ \times ·०११२ \times २·०२२$

(२) $\dfrac{८·२५७ \times ११·८३ \times ·५२९२}{३·१४५ \times १·८३२}$

या प्रत्येकाचें मान काढा.

(५) गणन करा (calculate)—

(१) $(·०३६)^{१०}$, $\left(\dfrac{१}{६·०१}\right)^{३५}$, $(·९२)^{००}$

(२) $४६^{२·६}$, $(२·९)^{\frac{१}{२}}$, $(·०००१२२)^{\frac{१}{३}}$

(६) सिद्ध करा—

(१) $७ \text{ छे } \dfrac{१६}{१५} + ५ \text{ छे } \dfrac{२५}{२४} + ३ \text{ छे } \dfrac{८१}{८०} = \text{ छे } २$

[अलाहाबाद १९४०

(२) $७ \text{ छे } \dfrac{१०}{९} - २ \text{ छे } \dfrac{२५}{२४} + ३ \text{ छे } \dfrac{८१}{८०} = \text{ छे } २$

[कलकत्ता १९२३

(७) ढोबळ मान काढा—

(१) $\dfrac{(२३·५)^{२} \times (·५२३)^{३}}{१-(०·३५२)^{२}}$ [मद्रास १९४२

(२) $\sqrt{\dfrac{१७^{\frac{१}{५}} \times ३^{१·६}}{\sqrt{५२} \cdot \sqrt{८९}}}$

(३) $\dfrac{(\text{ज्या } ७०^\circ ३२')^{\frac{१}{५}} \; (\text{स्प } ४०^\circ ५०')^{\frac{३}{२}}}{(\cdot ३२३३)^{\frac{१}{२}} \; \text{कोज्या } ५५^\circ ४'}$

(८) $\text{छे}_{१८}९$, $\text{छे}_{८}\cdot९८$, $\text{छे}_{१७}३३२$ काढा.

(९) जर $\text{छे}_{१०}\text{क} = \text{ख}$ असेल तर $\text{छे}_{१००}\text{क}$ आणि $\text{छे}_{\cdot००१}\text{क}$ काढा. [मुंबई.१९०१

(१०) कोणत्याहि छेदापद्धतीचे
(१) २ या आधारापासून १२८ या आधारावर
(२) ३ या आधारापासून ८१ या आधारावर
(३) ४९ या आधारापासून ७ या आधारावर परिवर्तन करणारा गुणक काढा.

(११) (अ) (१) $२^{७३}$, (२) $३^{४४}$ यातील अंकांची संख्या काढा.

(आ) (१) $२^{-१९}$, (२) $३^{-१३}$ यातलि पहिल्या ठळक (significant) अंकाचें स्थान काढा.

(१२) पुढील समीकार ढोळक मानाने सोडवा.
(१) $७^{२य} - ९(७^{य}) + १४ = ०$ [आंध्र १९३३
(२) $\dfrac{२^{१य}}{३^{य-१}} = ७^{य+१}$
(३) $२^{य-१} = ३^{र+१}$, $२^{य-र} \times ७^{र} = ९$

(१३) छे ९६४१ = ३·२८४१

छे ९६४२ = ३·२८४२

दिल्या आहेत; तर अनुपाती भागांचा प्रनियम वापरुन छे $(\cdot ९६४१८)^{३}$ काढा.

(१४) स्प ५१°६′ = १·२३९३ व स्प ५१°७′ = १·२४०१ दिल्या आहेत; तर अनुपाती भागांच्या प्रनियमाने स्प ५१°६′२५″ काढा.

प्रकरण चवदावें

त्रिकोणांचे निर्धारण

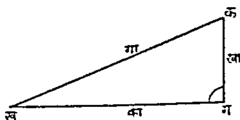
१४·१ त्रिकोणाच्या तीन बाजू व तीन कोण यांना त्याचे अवयव (elements) म्हणतात. ज्यांपैकी निदान एक अवयव बाजू आहे असे कोणतेहि तीन अवयव दिले असल्यास त्रिकोण काढतां येतो हें रेखिकीवरून आपणांस माहीत आहे. त्याचप्रमाणे एखाद्या त्रिकोणाचे कोणतेहि तीन अवयव (ज्यांपैकी एक अवयव एक बाजू आहे) दिले असल्यास त्रिकोणमितीने आपणांस बाकीचे अवयव काढतां येतात. या क्रियेस त्रिकोणाचें निर्धारण (solution of the triangle) म्हणतात.

पूर्वी सांगितल्याप्रमाणे कखग या त्रिकोणाचे कोण क, ख, ग या अक्षरांनी व त्यांच्या समोरील बाजू अनुक्रमें का, खा, गा या अक्षरांनी दर्शविल्या जातात.

प्रथम आपण लंबकोणत्रिकोणांच्या निर्धारणाचें विवेचन करूं. पुढील दोन अनुच्छेदांत ∠ग लंबकोण घेतला आहे.

१४.२ प्रकार १. दोन बाजू दिल्या असतांना त्रिकोणाचें निर्धारण करणें.

(१) समजा का, खा या बाजू दिल्या आहेत.



आ. १४.१

आता स्प क = $\frac{\text{का}}{\text{खा}}$

∴ छे स्प क = छे का − छे खा

आता का, खा दिलेल्या आहेत. म्हणून छे स्प क आणि त्यापासून क मिळतो.

आणि ख हा कोण ख = ९०° − क या संबंधावरून माहीत होतो.

गा = $\frac{\text{का}}{\text{ज्या क}}$ किंवा $\frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}}$ किंवा $\sqrt{\text{का}^2 + \text{खा}^2}$

यांपैकी कोणत्याहि एका संबंधावरून कर्ण गा काढतां येतो.

गा = $\sqrt{\text{का}^2 + \text{खा}^2}$ हा संबंध छेदांच्या गणनेसाठी सोयीचा नसल्यामुळे गा = $\frac{\text{का}}{\text{ज्या क}}$ किंवा गा = $\frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}}$ हा संबंध वापरणेंच अधिक चांगलें असतें.

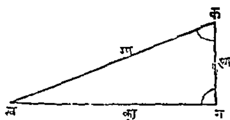
(२) समजा कर्ण गा व एक बाजु का हीं दिलीं आहेत. (आकृति १४·१ पहा)

क हा कोण, ज्या क $= \frac{\text{का}}{\text{गा}}$ या समीकारापासून मिळतो.
(हा समीकार आणि या व पुढच्या अनुच्छेदांत येणारे असे सर्व समीकार सारण्यांच्या साह्याने सोडवावेत.)

नंतर ख ($=९०^\circ -$ क) माहीत होतो.
खा ही बाजू,
खा $=$ गा ज्या ख किंवा का कोस्पक किंवा $\sqrt{\text{गा}^2 - \text{का}^2}$,
यांपैकी कोणत्याहि एका संबंधावरून मिळते.

१४·२१. प्रकार २— एक न्यूनकोण व एक बाजू दिली असतांना त्रिकोणाचें निर्धारण करणें.

(१) समजा कोण क व बाजू खा हीं दिलीं आहेत.



आ. १४.२

ख, का आणि गा अनुक्रमें

ख $=९०^\circ -$ क,
का $=$ खा स्प क,
गा $= \frac{\text{खा}}{\text{कोज्या क}}$

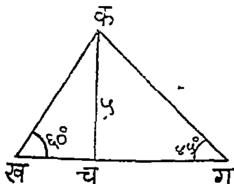
या संबंधांवरून निश्चित करतां येतात.

(२) समजा कोण क व कर्ण गा हे दिले आहेत. (आकृति १४·२ पहा.)

ग, का आणि खा अनुक्रमें
ख = ९०° − क,
खा = गा कोज्या क,
का = गा ज्या क,
या समीकारांवरून माहीत होतात.

१४.२२ 'उंची आणि अंतरें' यांवरील प्रश्न सोडवितांना वरील माहिती उपयोगी पडेल.

१४.२३ उदाहरण १. कखग त्रिकोणांत खग या पायाला कच रेषा लंब आहे. ख = ६०°, ग = ४५°, कच = ५ असल्यास खा व गा काढा.



आ. १४·३

कचग त्रिकोणांत,

$$\text{ज्या ग} = \frac{\text{कच}}{\text{कग}}$$

$$\therefore \text{ज्या } ४५^\circ = \frac{५}{\text{खा}}$$

किंवा खा $= ५\sqrt{२}$.

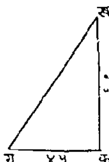
कखच त्रिकोणांत,

$$\text{ज्या ख} = \frac{\text{कच}}{\text{कख}}$$

$$\therefore \text{ज्या } ६०^\circ = \frac{५}{\text{गा}}$$

$$\text{किंवा गा} = \frac{५\cdot२}{\sqrt{३}} = \frac{१० \sqrt{३}}{३}$$

उदाहरण २. कखग त्रिकोणांत क=९०°, खा =४·५, गा = ६·९ असल्यास त्रिकोणाचें निर्धारण करा.



आ १४·४

$$\text{आता स्प ख} = \frac{\text{खा}}{\text{गा}}$$

$$= \frac{४\cdot५}{६\cdot९}$$

$$= \frac{४५}{६९}.$$

∴ छे स्प ख = छे ४५ − छे ६९

= १·६५३२ − १·८३८८ छेदसारणीवरून

= −·१८५६

= $\bar{१}$·८१४४

छेदस्पर्शाच्या सारणीवरून,

छे स्प ३३°७′ = $\bar{१}$·८१४५

∴ ख = ३३°७′ जवळजवळ.

∴ ग = ९०° − ख

= ९०° − ३३°७′

= ५६°५३′

पुन्हा का = $\frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}}$

किंवा का = $\frac{४·५}{\text{ज्या ३३°७′}}$

∴ छे का = छे ४·५ − छे ज्या ३३°७′

= ·६५३२ − $\bar{१}$·७३७५ सारणीवरून

= ·६५३२ + १ − ·७३७५

= ·९१५७

= छे ८·२३५ प्रतिच्छेदसारणीने

∴ का = ८·२३५

उदाहरणसंग्रह १९

(१) कखग त्रिकोणांत ग हा लंबकोण आहे. का = १२, खा = ३ √२ असल्यास त्रिकोणाचें निर्धारण करा.

(२) कखग त्रिकोणांत क = ९०°, खा = ४०, ग = १५° असल्यास बाजू काढा.

(३) कखग त्रिकोणांत ∠ग = ९०°, खा = ४·३, गा = ८·६ असल्यास त्रिकोणाचें निर्धारण करा.

(४) कखग त्रिकोणांत खग ला कच लंब आहे. खच = ९ पाद, ∠ख = ३०°, ∠ग = ४०° असल्यास कख, कग, कच आणि गच यांच्या लांबी काढा.

१४·३ आतां आपण कोणत्याहि त्रिकोणाच्या निर्धारणाविषयीं विवेचन करूं.

सामान्यतः, ज्यांत एका बाजूचा समावेश होतो असे, त्रिकोणाचे तीन अवयव दिले असल्यास त्रिकोणाचें पूर्णपणें निर्धारण करतां येतें हें आपणांस माहीतच आहे. आतां हे तीन अवयव घेण्याचे पुढील चार प्रकार असूं शकतात.

प्रकार १. तीन बाजू
प्रकार २. दोन बाजू व अंतर्गत (included) कोण
प्रकार ३. एक बाजू व दोन कोण
प्रकार ४. दोन बाजू व त्यांपैकी एकीच्या समोरील कोण

त्रिकोणाचे केवळ तीनच कोण दिलेले असल्यास त्याचें निर्धारण करणें शक्य नसतें. या प्रकाराचा विचार स्वतंत्रपणें १४.८ या अनुच्छेदांत केला आहे.

१४.५ प्रकार १. कखग त्रिकोणाच्या तीन बाजू दिलेल्या आहेत

$$\text{आता}\quad \text{स्प}\frac{\text{क}}{२}=\sqrt{\frac{(\text{सा}-\text{खा})(\text{सा}-\text{गा})}{\text{सा}(\text{सा}-\text{का})}}$$

$$\therefore \text{छे स्प}\frac{\text{क}}{२}=\frac{१}{२}\Big\{\text{छे}(\text{सा}-\text{खा})+\text{छे}(\text{सा}-\text{गा})$$
$$-\text{छेसा}-\text{छे}(\text{सा}-\text{का})\Big\}$$

का, खा, गा बाजू दिल्या आहेत.

म्हणून सा$\left(=\frac{\text{का}+\text{खा}+\text{गा}}{२}\right)$ ही राशि आणि तिच्यावरून (सा − का), (सा − खा), व (सा − गा) या राशी काढतां येतात.

नंतर वरील समीकारावरुन $\frac{\text{क}}{२}$, व म्हणून क, सारण्यांच्या साह्यानें काढतां येतो.

तसेंच, स्प$\frac{\text{ख}}{२}$ च्या सूत्रावरून ख, व नंतर ग = १८०° − क − ख वरून ग काढतां येतो.

ज्या अ = ज्या (१८०° − अ) असल्यामुळे आपल्याला दिलेल्या ज्ये वरून कोणाच्या दोन ऋजुपूरक अर्हा मिळतात. म्हणून निश्चित केलेला कोण संदिग्ध असतो. म्हणून अर्ध-कोणाच्या ज्यार्ची सूत्रें वापरता येत नाहीत उलट

$$\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{\text{२}} = \sqrt{\frac{\text{सा (सा − का)}}{\text{खा गा}}}$$

$$\text{व कोज्या}\frac{\text{ख}}{\text{२}} = \sqrt{\frac{\text{सा(सा − खा)}}{\text{गा का}}}$$

ही अर्धकोणाच्या कोटिज्यांची सूत्रें वापरण्यास हरकत नाही.

या सूत्रांवरून $\frac{\text{क}}{\text{२}}$ आणि $\frac{\text{ख}}{\text{२}}$ असंदिग्ध रीतीनें काढता येतात.

परतु यांचा उपयोग करतांना सा, (सा − का), (सा − खा), का, खा, गा या सहा राशींच्या छेदा काढाव्या लागतात, उलट अर्धकोणांच्या स्पर्शज्यार्ची सूत्रें वापरताना सा, (सा − का), (सा − खा) व (सा − गा) या चारच राशींच्या छेदा काढाव्या लागतात

म्हणून, जव्हा सर्व कोण काढण्यासाठी सारण्यार्चे साह्य घेणें आवश्यक असेल तेव्हा स्पर्शज्यान्या सूत्राचा उपयोग करणें सर्वांत चागलें असतें परतु एकच कोण हवा असेल तर ज्या, कोटिज्या, स्पर्शज्या यांपैकीं कोणत्याहि एकीच्या सूत्राचा उपयोग केला तरी चालतो

त्रिकोणाचे केवळ तीनच कोन दिलेले असल्यास, त्याचें निर्धारण करणें शक्य नसतें. या प्रकाराचा विचार स्वतंत्रपणें १४.८ या अनुच्छेदांत केला आहे.

१४.५ प्रकार १. कखग त्रिकोणाच्या तीन बाजू दिलेल्या आहेत.

$$\text{आता}\quad \text{स्प}\frac{\text{क}}{2} = \sqrt{\frac{(\text{सा}-\text{खा})(\text{सा}-\text{गा})}{\text{सा}(\text{सा}-\text{का})}}$$

$$\therefore \text{छेस्प}\frac{\text{क}}{2} = \frac{1}{2}\left\{\text{छे}(\text{सा}-\text{खा}) + \text{छे}(\text{सा}-\text{गा}) - \text{छेसा} - \text{छे}(\text{सा}-\text{का})\right\}$$

का, खा, गा बाजू दिल्या आहेत.

म्हणून सा$\left(=\frac{\text{का}+\text{खा}+\text{गा}}{2}\right)$ ही राशि आणि तिच्यावरून (सा − का), (सा − खा), व (सा − गा) या राशी काढतां येतात.

नंतर वरील समीकारावरुन $\frac{\text{क}}{2}$, व म्हणून क, सारण्यांच्या साह्याने काढतां येतो.

तसेंच, स्प$\frac{\text{ख}}{2}$ च्या सूत्रावरून ख, व नंतर ग = १८०° − क − ख वरून ग काढतां येतो.

ज्या अ = ज्या (१८०° − अ) असल्यामुळे आपल्याला दिलेल्या ज्ये वरून कोणाच्या दोन ऋजुपूरक अर्हा मिळतात. म्हणून निश्चित केलेला कोण संदिग्ध असतो. म्हणून अर्ध-कोणांच्या ज्यांचीं सूत्रें वापरतां येत नाहीत. उलट

$$\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{2} = \sqrt{\frac{\text{सा (सा − का)}}{\text{सा गा}}}$$

$$\text{व कोज्या}\frac{\text{ख}}{2} = \sqrt{\frac{\text{सा(सा − खा)}}{\text{गा का}}}$$

ही अर्धकोणांच्या कोटिज्यांचीं सूत्रें वापरण्यास हरकत नाही.

या सूत्रांवरून $\frac{\text{क}}{2}$ आणि $\frac{\text{ख}}{2}$ असंदिग्ध रीतीनें काढतां येतात.

परंतु यांचा उपयोग करतांना सा, (सा − का), (सा − खा), का, खा, गा या सहा राशींच्या छेदा काढाव्या लागतात; उलट अर्धकोणांच्या स्पर्शज्यांचीं सूत्रें वापरतांना सा, (सा − का), (सा − खा) व (सा − गा) या चारच राशींच्या छेदा काढाव्या लागतात.

म्हणून, जव्हां सर्व कोण काढण्यासाठी सारण्यांचें साह्य घेणें आवश्यक असेल तेव्हां स्पर्शज्यांच्या सूत्रांचा उपयोग करणें सर्वांत चांगलें असतें. परंतु एकच कोण हवा असेल तर ज्या, कोटिज्या, स्पर्शज्या यांपैकीं कोणत्याहि एकीच्या सूत्रांचा उपयोग केला तरी चालतो.

पुढील कोटिज्या-नियमावरूनहि कोण काढतां येतात.

$$\text{कोज्या क} = \frac{\text{खा}^2 + \text{गा}^2 - \text{का}^2}{२\ \text{खा}\ \text{गा}},$$

$$\text{कोज्या ख} = \frac{\text{गा}^2 + \text{का}^2 - \text{खा}^2}{२\ \text{गा}\ \text{का}}$$

ही सूत्रें छेदा-गणनाकरितां सोयीस्कर नाहीत. का, खा, गा लहान संख्या असतील तेव्हांच त्यांचा उपयोग करावा.

१४.४१ उदाहरण. का = ४७, खा = ५३, गा = २२ असल्यास सर्व कोण काढा.

$$\text{आता}\quad \text{सा} = \frac{४७ + ५३ + २२}{२} = ६१.$$

सा − का = ६१ − ४७ = १४, सा − खा = ६१ − ५३ = ८ आणि सा − गा = ६१ − २२ = ३९.

$$\therefore\quad \text{स्प}\frac{\text{क}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{खा})\ (\text{सा} - \text{गा})}{\text{सा}\ (\text{सा} - \text{का})}}$$

$$= \sqrt{\frac{८ \times ३९}{६१ \times १४}}$$

$$\therefore\quad \text{छे स्प}\frac{\text{क}}{२} = \frac{१}{२}\ \left\{\text{छे}\ ८ + \text{छे}\ ३९ - \text{छे}\ ६१ - \text{छे}\ १४\right\}$$

$$=\frac{१}{२}\left\{·९०३१+१·५९११-१·७८५३-१·१४६१\right\}$$ छेदासारणीने.

$$=\frac{१}{२}\left(-·४३७२\right)$$

$=-.२१८६$

$=\bar{१}.७८१४$

$=$छे स्प ३१°९' छेदा-स्पर्शांच्या सारणीवरून

$\therefore \quad \frac{क}{२}=३१°९'$ व $क=६२°१८'$

$$पुन्हा\ स्प\ \frac{ख}{२}=\sqrt{\frac{(सा-गा)\ (सा-का)}{सा\ (सा-खा)}}$$

$$=\sqrt{\frac{३९\times १४}{६१\times ८}}$$

$$\therefore\ छे\ स्प\ \frac{ख}{२}=\frac{१}{२}\left\{छे\ ३९+छे १४-छे ६१-छे ८\right\}$$

$$=\frac{१}{२}\left\{१·५९११+१·१४६१-१·७८५३-·९०३१\right\}$$

$$=\frac{१}{२}\ (·०४८८)$$

$=·०२४४$

आता छेदा-स्पर्शज्या सारणीवरून

छे स्प $४६^\circ३६' = \cdot०२४३$,

आणि छे स्प $४६^\circ३७' = \cdot०२४६$

म्हणून छे स्प $४६^\circ३६'$ व छे स्प $४६^\circ३७'$ यांमधे

छे स्प $\frac{ख}{२}$ आहे.

$\therefore ४६^\circ३६'$ व $४६^\circ३७'$ यांमधे $\frac{ख}{२}$ आहे.

समजा $\frac{ख}{२} = ४६^\circ३६'य''$

मग, $य''$ करिता फरक = छे स्प $\frac{ख}{२}$ − छे स्प $४६^\circ३६'$

$= \cdot०२४४ - \cdot०२४३$

$= \cdot०००१$

आणि $६०''$ करिता फरक = छे स्प $४६^\circ३७'$

− छे स्प $४६^\circ३६'$

$= \cdot०२४६ - \cdot०२४३$

$= \cdot०००३$.

$$\therefore \frac{य}{६०} = \frac{\cdot०००१}{\cdot०००३} = \frac{१}{३}$$

$$किंवा\ य = \frac{६०}{३} = २०$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ख}}{२} = ४६^\circ३६'२०''$$

$$\therefore \quad \text{ख} = ९३^\circ१२'४०''$$

$$\therefore \quad \text{ग} = १८०^\circ - \text{क} - \text{ख}$$
$$= १८०^\circ - ६२^\circ१८' - ९३^\circ१२'४०''$$
$$= २४^\circ२९'२०''$$

उदाहरणसंग्रह २०

(१) एका त्रिकोणाच्या बाजू ८, १० व १२ आहेत; तर त्याचा महत्तम कोण लघुत्तम कोणाच्या दुप्पट आहे हें दाखवा.

(२) एका त्रिकोणाच्या बाजू ७५३, ३७५ व ८७२ आहेत; तर त्याचा लघुत्तम कोण काढा.

[मद्रास १८९७

(३) एका त्रिकोणाच्या बाजू २:३:४ या प्रमाणांत आहेत; तर त्रिकोणाचें निर्धारण करा.

(४) एका त्रिकोणाच्या बाजू अनुक्रमें ५७, १५ व ४८ पाद लांब आहेत; तर त्याचा महत्तम कोण १२०° आहे हें सिद्ध करा.

पुढें दिलेल्या अवयवांवरून त्रिकोणाचें निर्धारण करा—

(५) $\text{का} = २२४, \quad \text{खा} = २५६, \quad \text{गा} = २८८.$

(६) $का = \frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}}$, $खा = \frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt{२}}$, $गा = \frac{\sqrt{३}}{२}$

[वनारस १९३५

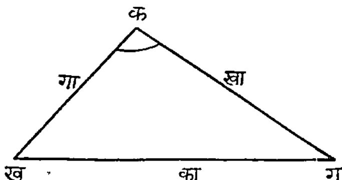
(७) का = २, खा = $\sqrt{३}+१$, गा = $\sqrt{६}$

(८) का = ३५·१६, खा = ४५·२६, गा = ५६·७८

[आंध्र १९४२

१४·५ प्रकार २. त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि अंतर्गत कोण हीं दिलीं आहेत.

समजा, कखग त्रिकोणाच्या खा व गा या बाजू व त्यांचा अंतर्गत कोण क हे दिले असून खा बाजू गा पेक्षा मोठी आहे.



आ. १४·५

१०·६ या अनुच्छेदानुसार

$$स्प \frac{ख-ग}{२} = \left(\frac{खा-गा}{खा+गा}\right) कोस्प \frac{क}{२}$$

$$\therefore \text{ छेस्प } \frac{\text{ख} - \text{ग}}{२} = \text{छे } (\text{खा} - \text{गा}) - \text{छे } (\text{खा} + \text{गा}) - \text{छेस्प } \frac{\text{क}}{२} \quad \ldots\ldots (१)$$

$$\text{शिवाय } \frac{\text{ख} + \text{ग}}{२} = ९०^{\circ} - \frac{\text{क}}{२} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

(१) व (२) या संबंधांवरून $\frac{\text{ख} - \text{ग}}{२}$ व $\frac{\text{ख} + \text{ग}}{२}$ मिळतात व त्यांचा योग आणि वियोग करून ख आणि ग हे कोण काढतां येतात.

$$\text{नंतर } \frac{\text{का}}{\text{ज्या क}} = \frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}}$$

$$\text{किंवा छे का} = \text{छे खा} + \text{छे ज्या क} - \text{छे ज्या ख}$$

यासूत्रावरून का मिळते.

$\text{का}^2 = \text{खा}^2 + \text{गा}^2 - २ \text{ खा गा कोज्या क}$ या संबंधापासूनहि का काढतां येते.

पूर्वी सांगितल्याप्रमाणे खा आणि गा लहान संख्या असतील तेव्हाच या सूत्राचा उपयोग करावा.

१४·५१ उदाहरण. एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू ७:५ या प्रमाणांत असून त्यांचा अंतर्गत कोन १०२°३६' आहे; तर बाकीचे कोन काढा.

$$\text{समजा } \frac{\text{खा}}{\text{गा}} = \frac{७}{५}$$

म्हणून, पक्षावरून, ख आणि ग बाजूंमधील अंतर्गत कोण क=१०२°३६'

$\therefore$ स्प $\frac{ख-ग}{२}=\left(\frac{७-५}{७+५}\right)$ कोस्प $\left(\frac{१०२°३६'}{२}\right)$

$=\frac{१}{६}$ कोस्प ५१°१८'

$=\frac{१}{६}$ स्प ३८°४२'

$\therefore$ छे स्प $\frac{ख-ग}{२}$=छे स्प ३८°४२'−छे ६

$=\bar{१}$·२०३७−·७७८२ सारणीवरून

$=\bar{१}$·१२५५

आता, सारणीवरून,

छे स्प ७°३६'=$\bar{१}$·१२५२, व छे स्प ७°३७'=$\bar{१}$·१२६२

$\therefore$ ७°३६' व ७°३७' मधे $\left(\frac{ख-ग}{२}\right)$ आहे.

समजा $\frac{ख-ग}{२}$=७°३६' य"

य" करिता फरक=$\bar{१}$·१२५५−$\bar{१}$·१२५२=·०००३

व ६०" करिता फरक=$\bar{१}$·१२६२−$\bar{१}$·१२५२=·००१०

$\therefore$ $\frac{य}{६०}=\frac{·०००३}{·००१०}=\frac{३}{१०}$

$\therefore$ य=१८

$$\therefore\ \frac{ख-ग}{२} = ७^\circ२६'१८'' \qquad \ldots\ldots\ldots(१)$$

$$\text{शिवाय}\ \frac{ख+ग}{२} = ९०^\circ - \frac{क}{२}$$

$$= ९०^\circ - ५१^\circ१८'$$

$$= ३८^\circ४२' \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(२)$$

(१) आणि (२) यांच्या योगाने आणि वियोगाने,

$ख = ४६^\circ१८'१८''$,

$ग = ३१^\circ५'४२''$

उदाहरणसंग्रह २१

कखग त्रिकोणात,

(१) $का = २४२$, $खा = १६३$, $\angle ग = ५४^\circ$ असल्यास त्रिकोणाचें निर्धारण करा. [नागपूर १९४६

(२) $का = ३$, $खा = १$, $ग = ५३^\circ७'४८''$ असल्यास क आणि ख काढा. [नागपूर १९५१

(३) $गा = २१०$, $का = ११०$, $ख = ३४^\circ४२'३०''$ असल्यास ग आणि क काढा. [नागपूर १९३२

(४) का, खा या बाजू १७:११ या प्रमाणांत असून स्प$\frac{ग}{२} = \frac{१६}{१५}$ असल्यास क आणि ख काढा.

(५) $खा = २गा$ व कोण $क = ६०^\circ$ असल्यास ख, ग हे कोण आणि का चें खा शीं असलेलें प्रमाण काढा.

(६) का = ३०, खा = २० व अंतर्गत कोण २२° आहे; तर बाकीचे कोण काढा. [बनारस १९३९

(७) खा = २७, गा = २३, क = ४४°३०′ आहेत; तर ख आणि ग काढा. [बनारस १९४१

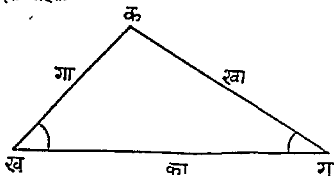
(८) खा = १३१, गा = ७२, क = ४०° असल्यास ख आणि ग काढा. [अलाहाबाद १९३८

(९) खा आणि गा यांचे प्रमाण ७:३ असून अंतर्गत कोण क ६०° आहे; तर ख आणि ग काढा. [अलाहाबाद १९४०

(१०) खा = $\sqrt{६}$, गा = $३ - \sqrt{३}$, क = ७५° आहेत; तर त्रिकोणाचे निर्धारण करा.

(सूचना— $का^२ = खा^२ + गा^२ - २ खा गा$ कोज्या क वापरा.)

१४६ प्रकार ३. त्रिकोणाची एक बाजू व दोन कोण हे दिले आहेत.



आ· १४·६

समजा, कखग त्रिकोणाची का ही बाजू आणि ख, ग हे कोण दिलेले आहेत.

ख, ग दिलेले असल्यामुळे क=१८०°−ख−ग या समीकारावरून क माहीत होतो.

$$\text{खा} = \frac{\text{का ज्या ख}}{\text{ज्या क}}$$

किंवा छे खा = छे का + छे ज्या ख − छे ज्या क

तसेच, $\text{गा} = \frac{\text{का ज्या ग}}{\text{ज्या क}}$

किंवा छे गा = छे का + छे ज्या ग − छे ज्या क ∴
या संबंधांवरून खा आणि गा निश्चित होतात.

१४·८१ उदाहरण. कखग त्रिकोणांत, का= ४२७, ख=३०°, ग =७०°२५' असल्यास लघुत्तम बाजू काढा.

आता क= १८०°−ख−ग
= १८०°−३०°−७०°२५'
= ७९°२५'

ख हा लघुत्तम कोण असल्यामुळे ख समोरील खा ही बाजू लघुत्तम असली पाहिजे.

आता $\text{खा} = \frac{\text{का ज्या ख}}{\text{ज्या क}}$

(आ') जर खा = गा असेल तर ख = ग असतो. म्हणून ग अधिककोण होतो, आणि म्हणून त्रिकोण शक्य नसतो.

(इ') जर खा > गा असेल तर ख > ग असतो. म्हणून (१) वरून मिळणारी ग ची केवळ न्यून अर्हाच ग्राह्य असते. म्हणून केवळ एकच त्रिकोण शक्य असतो.

आता आपण वरील सर्व फलांचें संकलन करूं.

(१) जर खा < गा ज्या ख असेल तर एकहि त्रिकोण शक्य नसतो.

(२) जर खा = गा ज्या ख असेल तर एक लंबकोण त्रिकोण असतो.

(३) जर खा > गा ज्या ख आणि < गा असून ख न्यून असेल तर दोन त्रिकोण शक्य असतात.

(४) जर खा > गा किंवा = गा आणि म्हणून अवश्यमेव > गा ज्या ख असुन ख न्यून असेल तर ग न्यून असलेला एक त्रिकोण शक्य असतो.

(५) जर ख अधिककोण असेल तर खा > गा असतांनाच एक त्रिकोण शक्य असतो, नाहीतर एकहि त्रिकोण शक्य नसतो.

खा, गा आणि ख यांच्या कांही विवक्षित अर्हा असल्यास त्रिकोण निश्चित करतांना संदेह किंवा संदिग्धता निर्माण होते; म्हणून या प्रकारास त्रिकोण-निर्धारणाचा संदिग्ध प्रकार म्हणतात.

अर्थात् ज्या ग < १ होते; आणि समीकार (१) वरून ग च्या दोन अर्हा मिळतात. यांपैकी एक अर्हा न्यून व दुसरी अधिक असून या दोन अर्हा एकमेकांना ऋजुपूरक असतात.

परंतु या दोन्ही अर्हा नेहमीच ग्राह्य असतात असें नाही. खालील उपप्रकारांचा आता विचार करूं.

(इ१) जर खा > गा असेल तर ख > ग असतो. पण दिलेला कोण ख न्यून आहे, म्हणून ग सुद्धा न्यून कोण असला पाहिजे. ख > ग असल्याने, ग आधिककोण असल्यास ख सुद्धा अधिककोण होईल. म्हणून ग ची अधिक अर्हा ग्राह्य नाही. या प्रकारांत ग ची एकच अर्हा असते.

(इ२) जर खा = गा असेल तर ख = ग असतो. म्हणून या प्रकारांत सुद्धा ग ची एकच अर्हा असूं शकते व ती न्यून असते.

(इ३) जर खा < गा असेल तर ख < ग असतो. या प्रकारांत ग च्या दोन्ही अर्हा ग्राह्य आहेत. ग च्या दोन अर्हां-वरून क च्याहि दोन अर्हा मिळतात. नंतर समीकार (२) वरून का च्या दोन अर्हा मिळतात. म्हणून या प्रकारांत दिलेले प्रतिबंध (conditions) पाळणारे दोन त्रिकोण असतात.

आता ख हा अधिककोण आहे असें समजा.

(अ') जर खा < गा असेल तर ख < ग असतो. म्हणून ग अधिककोण होतो. या प्रकारांत त्रिकोण शक्य नसतो.

(आ') जर खा = गा असेल तर ख = ग असतो. म्हणून ग अधिककोण होतो, आणि म्हणून त्रिकोण शक्य नसतो.

(इ') जर खा > गा असेल तर ख > ग असतो. म्हणून (१) वरून मिळणारी ग ची केवळ न्यून अर्थाच ग्राह्य असते. म्हणून केवळ एकच त्रिकोण शक्य असतो.

आता आपण वरील सर्व फलांचे संकलन करूं.

(१) जर खा < गा ज्या ख असेल तर एकहि त्रिकोण शक्य नसतो.

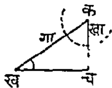
(२) जर खा = गा ज्या ख असेल तर एक लंबकोण त्रिकोण असतो.

(३) जर खा > गा ज्या ख आणि < गा असून ख न्यून असेल तर दोन त्रिकोण शक्य असतात.

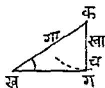
(४) जर खा > गा किंवा = गा आणि म्हणून अवश्यमेव > गा ज्या ख असून ख न्यून असेल तर ग न्यून असलेला एक त्रिकोण शक्य असतो.

(५) जर ख अधिककोण असेल तर खा > गा असतांनाच एक त्रिकोण शक्य असतो, नाहीतर एकहि त्रिकोण शक्य नसतो.

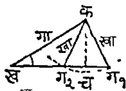
खा, गा आणि ख यांच्या कांही विवक्षित अर्थी असल्यास त्रिकोण निश्चित करतांना संदेह किंवा संदिग्धता निर्माण होते; म्हणून या प्रकारास त्रिकोण-निर्धारणाचा संदिग्ध प्रकार म्हणतात.



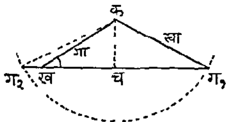
आकृति १



आकृति २



आकृति ३



आकृति ४

आ. १४·८

खा, गा, ख या दिलेल्या अवयवांवरून त्रिकोण काढण्याचा प्रयत्न करा. कख = गा घेऊन, ख या दिलेल्या कोणाएवढा कखच कोण काढा. ग हा तिसरा बिंदु खच वर असून क पासून खा इतक्या अंतरावर आहे म्हणून क हें केन्द्र आणि खा ही त्रिज्या घेऊन वृत्त काढा.

खच ला कच लंब काढा.

∴ कच = गा ज्या ख

आता पुढील प्रकार उद्भवतात.

(१) खा < गा ज्या ख अर्थात् < कच असेल तर काढलेलें वृत्त खच ला मुळीच छेदीत नाही. म्हणून एकहि त्रिकोण काढतां येत नाही. (आकृति १)

(२) खा = गा ज्या ख अर्थात् = कच असेल तर काढलेलें वृत्त खच ला च बिंदूंत स्पर्श करतें. म्हणून कखच किंवा कखग हा ग शीं लंबकोण असलेला एकच त्रिकोण तयार होतो. (आकृति २)

(३) खा > गा ज्या ख अर्थात् > कच, पण < गा असेल तर काढलेलें वृत्त खच ला ख च्या एकाच बाजूस असलेल्या ग$_1$ आणि ग$_2$ या दोन बिंदूंत छेदतें. म्हणून दिलेले अवयव असणारे कखग$_1$ व कखग$_2$ हे दोन त्रिकोण तयार होतात.

(आकृति ३)

(४) खा > गा म्हणून अवश्यमेव > गा ज्या ख अर्थात् > कच असेल तर काढलेलें वृत्त खच ला ख च्या विरुद्ध बाजूस असलेल्या ग$_1$ आणि ग$_2$ या दोन बिंदूंत छेदतें. आकृतींतील कखग$_2$ या त्रिकोणांतील कखग$_2$ हा कोण १८०° − ख एवढा आहे आणि म्हणून △कखग$_2$ दिलेले प्रतिबंध पाळीत नाही. म्हणून दिलेले अवयव असलेला कखग$_1$ हाच तेवढा त्रिकोण आहे.

खा = गा असल्यास ख आणि ग$_2$ हे बिंदू संपाती होतात आणि एकच त्रिकोण तयार होतो. (आकृति ४)

ख अधिककोण असतांना योग्य त्या आकृत्या काढल्यास असें दिसून येईल की $\text{खा} < \text{गा}$ किंवा $\text{खा} = \text{गा}$ असते तेव्हा त्रिकोण शक्य नसतो, परंतु $\text{खा} > \text{गा}$ असते तेव्हा केवळ एकच त्रिकोण तयार होतो.

१४.७२ संदिग्ध प्रकाराचा बैजिकीदृष्ट्या विचार.

अनुच्छेद १४ ७ च्या आकृतीवरून,

$$\text{खा}^2 = \text{गा}^2 + \text{का}^2 - 2\ \text{गा}\ \text{का}\ \text{कोज्या}\ \text{ख}$$

खा, गा, ख दिले आहेत, तर का काढणें.

वरील संबंध का चा वर्गसमीकार समजून पुढीलप्रमाणे लिहिता येतो.

$$\text{का}^2 - 2\ \text{गा}\ \text{कोज्या}\ \text{ख}.\ \text{का} + (\text{गा}^2 - \text{खा}^2) = 0$$

$$\therefore \quad \text{का} = \frac{2\text{गा}\ \text{कोज्या}\ \text{ख} \pm \sqrt{4\text{गा}^2\ \text{कोज्या}^2\ \text{ख} - 4(\text{गा}^2 - \text{खा}^2)}}{2}$$

$$\text{किंवा}, \text{का} = \text{गा}\ \text{कोज्या}\ \text{ख} \pm \sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2\ \text{ज्या}^2\ \text{ख}} \qquad \ldots\ldots\ldots (\text{अ})$$

(१) $\text{खा} < \text{गा}\ \text{ज्या}\ \text{ख}$ असल्यास $\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2\ \text{ज्या}^2\ \text{ख}}$ ही काल्पनिक (imaginary) राशि असते आणि (अ) वरून का ची एकहि वास्तविक अर्हा मिळत नाही. म्हणून कलम त्रिकोण शक्य नसतो.

(२) $\text{खा} = \text{गा}\ \text{ज्या}\ \text{ख}$ असल्यास समीकाराचीं दोन मूळें वास्तविक आणि समान असतात, आणि का, गा कोज्या ख

समान होते. म्हणून केवळ एकच लंबकोण त्रिकोण निर्माण होतो.

(३) खा > गा ज्या ख असल्यास का च्या दोन वास्तविक आणि भिन्न अर्हा असतात. का ही बाजू नेहमीच धन असल्यामुळे त्या दोन्हीहि अर्हा जेव्हा धन असतात तेव्हाच त्या ग्राह्य मानल्या जातात.

आता का च्या दोन अर्हांपैकी

गा कोज्या ख + $\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2\text{ज्या}^2\text{ख}}$ ही धन आहे.

आणि गा कोज्या ख − $\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2\text{ ज्या}^2\text{ ख}}$ धन होईल, पण त्यासाठी

$$\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2\text{ ज्या}^2\text{ ख}} < \text{गा कोज्या ख}$$

किंवा $\text{खा}^2 - \text{गा}^2\text{ ज्या}^2\text{ ख} < \text{गा}^2\text{ कोज्या}^2\text{ ख}$

किंवा $\text{खा}^2 < \text{गा}^2\ (\text{कोज्या}^2\text{ ख} + \text{ज्या}^2\text{ ख})$

किंवा $\text{खा}^2 < \text{गा}^2$

किंवा खा < गा

असावयास पाहिजे.

म्हणून खा > गा ज्या ख आणि < गा असते तेव्हाच दोन त्रिकोण निर्माण होतात.

(४) खा > गा असल्यास

गा कोज्या ख − $\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2\text{ ज्या}^2\text{ ख}}$

ही का ची अर्हा ऋण होते आणि म्हणून तत्संबद्ध त्रिकोण

शक्य नसतो. या प्रकारांत का च्या घन अर्हेनुसार केवळ एकच त्रिकोण शक्य असतो.

खा = गा असल्यास का ची एक अर्हा शून्य असते आणि तत्संबद्ध त्रिकोण शक्य नसतो. या प्रकारांत २ गा कोज्या ख ही का ची दुसरी अर्हा असणारा केवळ एकच त्रिकोण शक्य असतो.

(५) ख अधिककोण असल्यास गा कोज्या ख ऋण असते, आणि गा कोज्या ख $-\sqrt{\text{खा}^2-\text{गा}^2\text{ज्या}^2\text{ख}}$ ही का ची अर्हा नेहमी ऋण असते व तत्संबद्ध त्रिकोण शक्य नसतो.

आता, जर

$$\text{गा कोज्या ख} + \sqrt{\text{खा}^2-\text{गा}^2\text{ज्या}^2\text{ख}} > 0$$

किंवा $\sqrt{\text{खा}^2-\text{गा}^2\text{ज्या}^2\text{ख}} > -\text{गा कोज्या ख}$

किंवा $\text{खा}^2 > \text{गा}^2\text{कोज्या}^2\text{ख} + \text{गा}^2\text{ज्या}^2\text{ख}$

किंवा खा > गा

असेल तर का ची दुसरी अर्हा घन होते.

म्हणून ख अधिककोण असतांना, खा < गा किंवा खा = गा असल्यास त्रिकोण शक्य नसतो. परंतु खा > गा असेल तर केवळ एकच त्रिकोण शक्य असतो.

१४·७४ उदाहरण १. कखग त्रिकोणांत खा = ४१, गा = ६० व ख = २८°३०′ दिले आहेत. तर त्याचें निर्धारण संदिग्ध आहे हें सिद्ध करा आणि बाकीचे कोण काढा.

आता दिलेला कोण ख न्यून आहे. म्हणून निर्धारण संदिग्ध असण्याकरिता

$$\text{खा} > \text{गा ज्या ख व} < \text{गा}$$

अर्थात् ४१ > ६० ज्या २८°३०′ व < ६०
असावयास पाहिजे.

आता, प्राकृत ज्या-सारणीत, ज्या २८°३०′ = ·४७७२

∴ ४१ > ६० × ·४७७२ व < ६०

किंवा ४१ > २८·६३२ व < ६०
असेल तर त्रिकोणाविषयी संदिग्धता राहील.

परंतु हे सत्य आहे. म्हणून प्रकार संदिग्ध आहे.

$$\text{ज्या ग} = \frac{\text{गा ज्या ख}}{\text{खा}}$$

$$= \frac{\text{६० × ज्या २८°३०′}}{\text{४१}}$$

छे ज्या ग = छे ६० + छे ज्या २८°३०′ − छे ४१

$= \text{१·७७८२} + \bar{\text{१}}\text{·६७८७} − \text{१·६१२८}$

$= \bar{\text{१}}\text{·८४४१}$

= छे ज्या ४४°१८′

∴ ग = ४४°१८′ किंवा १८०° − ४४°१८′
म्हणून, १४·७२ या अनुच्छेदाच्या आकृति ३ वरून,

$ग_1 = ४४°१८'$

$ग_2 = १३५°४२'$

ग च्या दोन अर्हांनुसार, क च्या

$क_1 = \angle खकग_1 = १८०° - २८°३०' - ४४°१८' = १०७°१२'$

आणि

$क_2 = \angle खकग_2 = १८०° - २८°३०' - १३५°४२' = १५°४८'$ या दोन अर्हा मिळतात.

उदाहरण २. खा, गा, ख दिलेले असून संदिग्ध प्रकारांत $का_1$, $का_2$ या तिसऱ्या बाजूच्या अर्हा असतील तर

(१) $का_1 + का_2 = २गा \text{ कोज्या } ख$

(२) $\text{कोज्या } \frac{क_1 - क_2}{२} = \frac{गा}{खा} \text{ ज्या } ख$

[अलाहाबाद १९३१

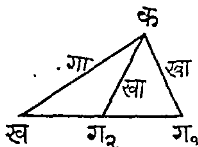
हें सिद्ध करा.

आता, $\text{कोज्या } ख = \frac{गा^2 + का^2 - खा^2}{२ गा का}$ या सूत्रावरून

$का^2 - २ \text{ गा कोज्या } ख \times का + (गा^2 - खा^2) = ०$

या समीकाराचीं $का_1$ व $का_2$ हीं मूळें आहेत; म्हणून वर्गसमीकाराच्या सिद्धांतानुसार (theory),

$का_1 + का_2 = २गा \text{ कोज्या } ख$ ... .(१)



आ. १४.९

आता,

$\text{क}_1 + \text{ख} + \text{ग}_1 = १८०^\circ$

आणि

$\text{क}_2 + \text{ख} + \text{ग}_2 = १८०^\circ$

∴ या दोन समीकारांचा योग करून,

$$(\text{क}_1 + \text{क}_2) + २\text{ख} + (\text{ग}_1 + \text{ग}_2) = ३६०^\circ$$

पण $\text{ग}_1, \text{ग}_2$ ऋजुपूरक कोण असल्यामुळे $\text{ग}_1 + \text{ग}_2 = १८०^\circ$

$$\therefore \quad \text{क}_1 + \text{क}_2 = १८०^\circ - २\text{ख}$$

किंवा $\dfrac{\text{क}_1 + \text{क}_2}{२} = ९०^\circ - \text{ख}$ ......(अ)

कखग_1 त्रिकोणांत, $\dfrac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}} = \dfrac{\text{का}_1}{\text{ज्या क}_1}$

कखग_2 त्रिकोणांत, $\dfrac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}} = \dfrac{\text{का}_2}{\text{ज्या क}_2}$

$$\therefore \frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}} = \frac{\text{का}_1}{\text{ज्या क}_1} = \frac{\text{का}_2}{\text{ज्या क}_2} = \frac{\text{का}_1 + \text{का}_2}{\text{ज्या क}_1 + \text{ज्या क}_2}$$

$$= \frac{२\,\text{गा कोज्या ख}}{२\,\text{ज्या}\dfrac{\text{क}_1 + \text{क}_2}{२}\,\text{कोज्या}\dfrac{\text{क}_1 - \text{क}_2}{२}}$$

(१) वरून

$$= \frac{\text{गा कोज्या ख}}{\text{ज्या } (९०^\circ - \text{ख}) \text{ कोज्या } \frac{\text{क}_१ - \text{क}_२}{२}},$$

(अ) वरून

$$= \frac{\text{गा कोज्या ख}}{\text{कोज्या ख कोज्या } \frac{\text{क}_१ - \text{क}_२}{२}}$$

$$= \frac{\text{गा}}{\text{कोज्या } \frac{\text{क}_१ - \text{क}_१}{२}}$$

$$\therefore \text{कोज्या } \frac{\text{क}_१ - \text{क}_२}{२} = \frac{\text{गा ज्या ख}}{\text{खा}}$$

उदाहरणसंग्रह २३

(१) पुढील अवयव दिले आहेत:—

(१) खा = २५, गा = १६, ख = ११५°६'

(२) खा = २२, गा = ३३, ख = ३०°४२'

(३) खा = ७, गा = ७, ख = १२०°

(४) खा = ४ √२, गा = ८, ख = ४५°

यांतून, ज्यांत (अ) एक त्रिकोण असतो, किंवा (आ) दोन त्रिकोण असतात, किंवा (इ) एकहि त्रिकोण नसतो असे प्रकार वेचून काढा. शिवाय शक्य असेल तेव्हा त्रिकोणाचें निर्धारण करा.

(२) गा = ४७·२३, का = ५६·५५, ग = ४८°२७′ दिले आहेत. तर कलग त्रिकोण संदिग्ध आहे हें सिद्ध करा आणि सारण्यांच्या साहाने त्याचें निर्धारण करा.

[नागपूर १९४२

(३) खालीलपैकी संदिग्ध प्रकार वेचून काढा व त्याबद्दल कारणें द्या आणि तत्संबद्ध त्रिकोणाचें निर्धारण करा.
(१) क = ३०°, गा = २५० पाद, का = १२५ पाद
(२) क = ३०°, गा = २५० पाद, का = २०० पाद

[पाटणा १९४२

(४) एका त्रिकोणाचा एक कोण ११२°४′ असून त्यासमोरील बाजू ५७३ पाद आहे आणि दुसरी एक बाजू ३२४ पाद आहे. तर बाकीचे कोण काढा.

[अलाहाबाद १९३९

(५) खा = २, गा = √३ + १, क = ४५° असल्यास कखग त्रिकोणाचें निर्धारण करा.

[मैसूर १९४३

(६) का = ३६०, खा = २८५, क = ३४° असल्यास कखग त्रिकोणाचें निर्धारण करा.

[त्रावणकोर १९४३

(७) कखग त्रिकोणाच्या संदिग्ध प्रकारांत खा, गा आणि ख दिले असल्यास का च्या दोन अर्हांमधील फरक २√खा² − गा²ज्या²ख आहे हें सिद्ध करा.

(८) कखग त्रिकोणांत खा, गा, ख दिले असतांना, त्याच्या संदिग्ध प्रकारांत $का_1$, $का_2$ या तिरऱ्या बाजूच्या अर्हा असून $का_1 > का_2$ असल्यास सिद्ध करा की

(१) $का_1 - का_2 = २$ खा कोज्या ग [बनारस १९२८

(२) $(का_1 - का_2)^2 + (का_1 + का_2)^2 स्प^2 ख = ४खा^2$

(३) $का_1^2 + का_2^2 - २ का_1 का_2$ कोज्या२ख

$= ४खा^2$कोज्या^{2}ख

[बनारस १९३५

१४·८ आता आपण १४·३ अनुच्छेदाच्या शेवटीं उल्लेखिलेल्या तीन कोणांच्या प्रकाराविषयीं विचार करूं.

केवळ क, ख, ग हे त्रिकोणाचे तीन कोण दिलेले असतात, तेव्हा $\frac{का}{ज्या क} = \frac{खा}{ज्या ख} = \frac{गा}{ज्या ग}$ या सूत्रावरून त्याच्या बाजूंचें परस्परांत असलेलें प्रमाण काढतां येतें, पण बाजूंच्या प्रत्यक्ष लांबी काढतां येत नसल्यामुळे त्रिकोणाचें निर्धारण करतां येत नाहीं. अशा प्रकारांत, दिलेले तीन कोण असणारे त्रिकोण असंख्य असून ते सर्व समरूप असतात.

१४·९ इतर न्यासावरून (data) त्रिकोणांचें निर्धारण.

त्रिकोणाच्या बाजू आणि कोण यांच्याऐवजी इतर न्यास दिलेला असल्यास कधीकधी त्याचें निर्धारण करतां येतें. खालील उदाहरणांवरून अशा वेळीं उपयोगांत आणलेली निर्धारणाची रीत दिसून येईल.

उदाहरण १. गा, का+खा, आणि ग दिले असल्यास त्रिकोणाचें निर्धारण करा.

$$\text{आता } \frac{\text{का}+\text{खा}}{\text{गा}} = \frac{\text{ज्या क}+\text{ज्या ख}}{\text{ज्या ग}}$$

$$= \frac{२\text{ज्या}\frac{\text{क}+\text{ख}}{२}\text{कोज्या}\frac{\text{क}-\text{ख}}{२}}{\text{ज्या ग}}$$

$$= \frac{२\text{कोज्या}\frac{\text{ग}}{२}\text{कोज्या}\frac{\text{क}-\text{ख}}{२}}{२\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२}\text{कोज्या}\frac{\text{ग}}{२}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या}\frac{\text{क}-\text{ख}}{२}}{\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२}}$$

$$\therefore \text{कोज्या}\frac{\text{क}-\text{ख}}{२} = \frac{\text{का}+\text{खा}}{\text{गा}}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२}$$

या संबंधावरून $\frac{\text{क}-\text{ख}}{२}$ माहीत होतो.

आणि $\frac{\text{क}+\text{ख}}{२} = ९०^\circ - \frac{\text{ग}}{२}$ वरून $\frac{\text{क}+\text{ख}}{२}$ माहीत होतो.

म्हणून क आणि ख हे कोन काढतां येतात.

आता क आणि ख हे कोन माहीत झाले आहेत आणि बाजू गा दिलेली आहे. म्हणून या उदाहरणाला प्रकार ३ चें रूप येतें

उदाहरण २. शिरोबिंदूंपासून समोरील बाजूंवर काढलेले लंब दिले आहेत, तर त्रिकोणाचें निर्धारण करा.

क, ख, ग या शिरोबिंदूंपासून समोरील बाजूंवर काढलेल्या लंबांच्या लांबी अनुक्रमें ल$_1$, ल$_2$, ल$_3$ आहेत असें समजा.

$\therefore$ का ल$_1$ = खा ल$_2$ = गा ल$_3$ = २Δ

$$\therefore \frac{\text{का}}{\frac{१}{\text{ल}_1}} = \frac{\text{खा}}{\frac{१}{\text{ल}_2}} = \frac{\text{गा}}{\frac{१}{\text{ल}_3}}$$

तीन बाजूंचें प्रमाण माहीत होतांच हें उदाहरण प्रकार १ च्या रूपांत येतें आणि तो प्रकार निर्धारण्याची रीत येथे लागू पडते.

उदाहरणसंग्रह २४

(१) एका त्रिकोणाचे कोण समांतर श्रेढींत असून त्याचा लघुत्तम कोण ३०° चा आहे. तर त्याची महत्तम बाजू लघुत्तम बाजूच्या दुप्पट आहे हें दाखवा.

(२) एका त्रिकोणाचे कोण १:५:६ या प्रमाणांत असल्यास त्याच्या बाजू $\sqrt{३}-१ : \sqrt{३}+१ : २\sqrt{२}$ या प्रमाणांत आहेत हें सिद्ध करा.

(३) कखग त्रिकोणांत कोज्या क = $\frac{\sqrt{३}}{२}$ व कोज्या ग = $\frac{\sqrt{५}}{३}$ असल्यास का : खा : गा हें प्रमाण काढा.

(४) एका त्रिकोणाचे कोण समांतर श्रेढींत आहेत आणि त्याच्या महत्तम व लघुत्तम बाजूंच्या लांबी अनुक्रमें २४ व १६ आहेत. तर त्रिकोणाचें निर्धारण करा.
[पाटणा १९३९

(५) एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू ६५ व २५ आहेत आणि त्यांच्या समोरच्या कोणांमधील फरक ६०° आहे. तर सर्व कोण काढा. [अलाहाबाद १९४२

कखग त्रिकोणांत,

(६) (का + खा + गा) (खा + गा − का) = खागा असेल तर क काढा.

(७) ग = ६०°, का − खा = १, काखा = २० असल्यास त्रिकोणाचें निर्धारण करा.

(८) का = ३२पाद, खा + गा = १०६पाद व ∠ग = १३२°३४′ असल्यास त्रिकोणाचें निर्धारण करा.
[नागपूर १९४४

$$\left[\text{सूचना — } \frac{\text{खा}+\text{गा}-\text{का}}{\text{खा}+\text{गा}+\text{का}} = \text{स्प}\frac{\text{ख}}{2}\text{स्प}\frac{\text{ग}}{2} \text{ वापरा.}\right]$$

(९) का = ८७ पाद, गा − खा = १९ पाद, ∠ख = ५७ दिले असल्यास कोण क व बाजू खा काढा.
[नागपूर १९४०

$$\left[\text{सूचना — } (\text{का}-\text{खा}+\text{गा})\,\text{स्प}\frac{\text{ख}}{2} = (\text{का}+\text{खा}-\text{गा})\,\text{स्प}\frac{\text{ग}}{2} \text{ वापरा.}\right]$$

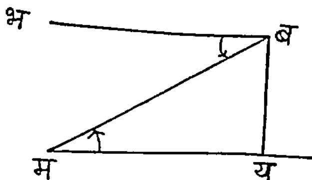
(१०) क = ६२°, ख = ४३° असून त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ ५३० वर्ग एककें (units) आहे. तर त्रिकोणाच्या बाजू काढा. [नागपूर १९४५

[सूचना — $\Delta = \frac{१}{२}$ का² ज्या ख ज्या ग व्युज्ज्या क वापरा.]

प्रकरण पंधरावें

उंची आणि अंतरें

१५·१ परिभाषा — म आणि ब हे दोन बिंदू असून



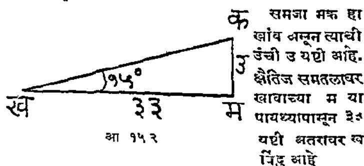
आ. १५·१

ब म पेक्षा उच्च पातळीवर (level) आहे. म तून काढलेली क्षैतिज (horizontal) रेषा ब मधून काढलेल्या उदग्र (vertical) रेषेस य बिंदूंत मिळते. बभ मय ला समांतर काढली आहे. म शीं डोळा ठेवून ब कडे पाहिलें असतां होणाऱ्या यमब कोणाला ब चा म शीं झालेला उन्नतिकोण (angle of elevation) म्हणतात, आणि ब शीं डोळा ठेवून बम दिशेने पाहिले असतां होणाऱ्या भबम कोणाला म चा ब शीं झालेला अवनतिकोण (angle of depression) म्हणतात.

१५·२ बिंदु किंवा इतर वस्तूंमधील (objects) अंतरें किंवा मनोरे, स्तूप इत्यादींच्या उंची, त्याच्याविषयी अवनति, उन्नति किंवा इतर आवश्यक कोण दिले असल्यास त्रिकोणमितीच्या साह्यानें काढता येतात. अवनति किंवा उन्नति कोणासारखे आवश्यक कोण मोजण्यासाठी षट्क (sextant) आणि त्रिकोणमान (theodolite) या यंत्राचा उपयोग करतात.

१५·३ आता आपण वस्तूंच्या उंची आणि त्यामधील अंतरें यासंबंधी काही उदाहरणें सोडवू.

उदाहरण १. एका क्षैतिज समतलावर एक खांब उभा आहे त्याच्या पायथ्यापासून ३२ यष्टी अंतरावर असलेल्या बिंदूशीं त्याच्या शिखराचा उन्नतिकोण १५° आहे असें आढळून येतें. तर त्या खांबाची उंची काढा.



आ १५२

समजा मक हा खांब असून त्याची उंची उ यष्टी आहे. क्षैतिज समतलावर खांबाच्या म या पायथ्यापासून ३२ यष्टी अंतरावर ख बिंदु आहे

कख जोडा. मग मकख त्रिकोणांत,

$\angle$मखक $=$ १५°

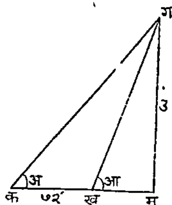
आणि $\frac{\text{उ}}{\text{३२}}$ $=$ स्प १५°

$$= \frac{\sqrt{३} - १}{\sqrt{३} + १}$$

$$= २ - \sqrt{३}$$

$\therefore$ उ = $(२ - \sqrt{३})$ ३३ यष्टी.

उदाहरण २. एका विवक्षित जागीं एका टेकडीच्या माथ्याच्या उन्नतिकोणाची कोटिस्पर्शज्या $\frac{७}{९}$ आहे. टेकडीकडे सरळ ७२ पाद चालून गेल्यावर त्याच्या उन्नतिकोणाची कोटिस्पर्शज्या $\frac{१}{३}$ होते. तर टेकडीची उंची काढा.



आ. १५·३

समजा मग ही टेकडी असून तिची उंची उ पाद आहे. क्षैतिज समतलावर क बिंदूशी ग या माथ्याचा उन्नतिकोण अ आहे.

$\therefore$ कोस्प अ = $\frac{७}{९}$

कम दिशेने कख हें ७२ पाद अंतर चालून गेल्यावर ख शीं आ उन्नतिकोण होतो.

$\therefore$ कोस्प आ $= \frac{१}{२}$

कमग त्रिकोणांत,

$\frac{७}{९}$ = कोस्प अ = $\frac{\text{कम}}{\text{उ}}$

$\therefore$ कम = $\frac{७\text{उ}}{९}$

खमग त्रिकोणांत,

$\frac{१}{२}$ = कोस्प आ = $\frac{\text{खम}}{\text{उ}}$

$\therefore$ खम = $\frac{\text{उ}}{२}$

आता कख = कम − खम

पण कख = ७२ पाद

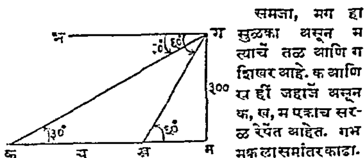
$\therefore$ ७२ = $\frac{७\text{उ}}{९} - \frac{\text{उ}}{२}$

= $\frac{४\text{उ}}{९}$

किंवा उ = १८ × ९

= १६२ पाद.

उदाहरण ३. एका सुळक्याचें शिखर समुद्रपातळीपासून ३०० पाद उंचीवर आहे. शिखरावरील निरीक्षकास समुद्रांत नांगरलेल्या दोन जहाजांचे अवनतिकोण अनुक्रमें ३०° व ६०° आहेत असें आढळून येतें. त्यांना जोडणारी रेषा सुळक्याच्या तळाशीं मिळत असल्यास जहाजांमधील अंतर काढा.



समजा, मग हा सुळका असून म त्याचें तळ आणि ग शिखर आहे. क आणि ख हीं जहाजें असून क, ख, म एकाच सरळ रेषेंत आहेत. गभ मकलासमांतर काढा.

आ. १५-४

पक्षावरून (data),

$\angle$ भगक = ३०°

$\angle$ भगख = ६०°

आणि मग = ३०० पाद.

$\therefore$ $\angle$ गकक = ३०°

व $\angle$ गखम = ६०°

समजा इष्ट अंतर कख = य पाद.

∴मग या लंबकोणत्रिकोणांत,

$$\frac{\text{मग}}{\text{कग}} = \text{ज्या}३०°$$

किंवा $\frac{३००}{कग} = \frac{१}{२}$

$$\therefore कग = ६०० \text{ पाद.}$$

कखग त्रिकोणांत,

$$\frac{कख}{ज्या\, कगख} = \frac{कग}{ज्या\, कखग}$$

$$\therefore \frac{य}{ज्या\, ३०^\circ} = \frac{६००}{ज्या(१८० - ६०^\circ)}$$

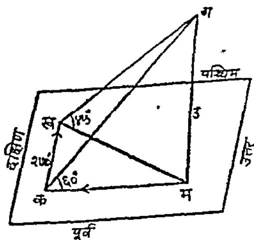
$$\text{किंवा } य = \frac{६०० \times \frac{१}{२}}{\frac{\sqrt{३}}{२}} \text{ पाद}$$

$$= \frac{६००}{\sqrt{३}} \text{ पाद}$$

$$= २०० \sqrt{३} \text{ पाद}$$

उदाहरण ४. एका बुरुजाचा उन्नतिकोण त्याच्या दक्षिणे-कडील क या एका बिंदूशी ६०° आणि क च्या पश्चिमेस असलेल्या ख या बिंदूशी ४५° आहे. कख हें अंतर २७० पाद असल्यास बुरुजाची उंची काढा.

समजा मग हा बुरूज आहे. म च्या दक्षिणेकडील क बिंदु हें पहिलें निरीक्षणाचें स्थान आहे.



आ १५.५

∴ $\angle$ मकग = ६०°

ख बिंदु क च्या पश्चिमेस २७० पाद अंतरावर आहे, व तें निरीक्षणाचें दुसरें स्थान आहे.

∴ $\angle$ मखग = ४५°

समजा बुरुजाची उंची उ पाद आहे.

मकग त्रिकोणांत,

$$\frac{\text{मग}}{\text{मक}} = \text{स्प } ६०° = \sqrt{३}$$

$$\therefore \text{ मक} = \frac{\text{मग}}{\sqrt{3}} = \frac{\text{उ}}{\sqrt{3}}$$

मखग त्रिकोणांत,

$$\frac{\text{मग}}{\text{मख}} = \text{स्प } 45^\circ = 1$$

$$\therefore \text{ मग} = \text{मख} = \text{उ}$$

मकख त्रिकोणांत,

$$\angle \text{मकख} = 90^\circ$$

$$\therefore \text{ कख}^2 + \text{मक}^2 = \text{मख}^2$$

$$\text{किंवा } (270)^2 + \frac{\text{उ}^2}{3} = \text{उ}^2$$

$$\therefore \frac{2}{3}\text{उ}^2 = (270)^2$$

$$\text{किंवा उ} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 270$$

$$= 135\sqrt{6} \text{ पाद.}$$

उदाहरणसंग्रह २५

(१) शेतांतील एका ताडाच्या झाडापासून ३७ पाद अंतरावरील बिंदूशीं झाडाच्या शेंड्याचा उन्नतिकोण ६०° आहे; तर झाडाची उंची काढा.

(२) $५\frac{१}{२}$ पाद उंचीचा मनुष्य एका दिव्याच्या खांबापासून ७ पाद अंतरावर उभा असतांना त्याची सावली १७ पाद लांब पडते. तर दिव्याच्या खांबाची उंची किती आहे?

(३) ८० पाद उंचीच्या खांबाला एक १६ पाद उंच असलेली झेंड्याची काठी अडकवली आहे, तर जमिनीवर खांबाच्या तळापासून ३२ पाद अंतरावर असलेल्या एका बिंदूशीं काठीने आपातित केलेला कोण काढा.

(४) एका इसमास एका पर्वतशिखराचा उन्नतिकोण १५° आहे असें आढळून येतें. सपाट जमिनीवरून पर्वताकडे सरळ १ क्रोशक अंतर चालून गेल्यावर उन्नतिकोण ६०° होतो; तर पर्वताची उंची काढा.

(५) ६० पाद उंची असलेल्या एका बुरुजाच्या माथ्याचे दुसऱ्या बुरुजाच्या माथ्यावरून व तळापासून मोजलेले अवनतिकोण व उन्नतिकोण अनुक्रमें ४५° व २०° आहेत. तर दुसऱ्या बुरुजाची उंची काढा.

(६) एका पर्वताच्या पायथ्याशीं त्याच्या शिखराचा उन्नतिकोण ४५° आहे. ३०°च्या चढावानें १ क्रोशक अंतर पर्वतावर चालून गेल्यानंतर उन्नतिकोण ६०° होतो; तर पर्वताची उंची काढा. [नागपूर १९४४

(७) एका समभुजत्रिकोणाकार शेताच्या मध्यभागीं क पाद उंचीचा स्तंभ उभा आहे. शेताची प्रत्येक बाजू

स्तंभाच्या शेंड्याशीं २ अ हा कोण आपातित करते; तर शेताचें क्षेत्रफळ

$$\frac{३\sqrt{३}\,क^{२}\,ज्या^{२}\,अ}{३-४\,ज्या^{२}\,अ}$$ वर्ग पाद आहे हें दाखवा.

[नागपूर १९४०

(८) एका सरोवरापासून २०० पाद उंचीवर असलेल्या बिंदूशीं एका विमानाचा उन्नतिकोण ४५° आहे, व विमानाच्या प्रतिबिंबाचा अवनतिकोण ७५° आहे; तर सरोवराच्या पृष्ठभागापासून विमान किती उंचीवर आहे तें काढा.

[बनारस १९४३

(९) एका नदीच्या तीरावर २०० पाद उंचीचा एक स्तंभ असून त्यावर एक ३० पाद उंच पुतळा आहे. स्तंभाच्या पायथ्याशीं उभा राहिलेला ६ पाद उंचीचा मनुष्य समोरील तीरावरच्या निरीक्षकाच्या डोळ्याशीं (डोळा जमिनीसपाट ठेवला असतांना) जितका कोण आपातित करील तितकाच कोण तो पुतळा आपातित करतो; तर नदीची रुंदी काढा.

[बनारस १९४१

(१०) एका बुरुजाच्या पूर्वेकडील क या ठिकाणाशीं बुरुजाचा उन्नतिकोण अ आहे, आणि क च्या उत्तरेस असलेल्या ख या ठिकाणाशीं उन्नतिकोण आ आहे;

तर मनोऱ्याची उंची $\frac{\text{कख ज्या अ ज्या आ}}{\sqrt{\text{ज्या (अ+आ) ज्या (अ−आ)}}}$

आहे हें दाखवा. [बनारस १९४०

(११) एका घुमटाच्या दक्षिणेकडील एका बिंदूशीं घुमटाचा उन्नतिकोण ४५° आहे व या बिंदूच्या पश्चिमेस असलेल्या दुसऱ्या एका बिंदूशीं उन्नतिकोण ३०° आहे. दोन बिंदूंमधील अंतर य असल्यास घुमटाची उंची काढा. [पाटणा १९४४

(१२) एका सरोवराच्या पृष्ठभागापासून च उंचीवर असलेल्या एका बिंदूशीं एका ढगाचा उन्नतिकोण अ आहे व त्याच बिंदूशीं ढगाच्या सरोवरांतील प्रतिबिंबाचा अवनतिकोण आ आहे; तर सरोवरापासून ढगाची उंची $\frac{\text{च ज्या (आ+अ)}}{\text{ज्या (आ−अ)}}$ आहे हें सिद्ध करा.

(ढग सरोवराच्या पृष्ठभागापासून जितका वर आहे तितकेंच त्याचें प्रतिबिंब पृष्ठभागाच्या खालीं आहे हें गृहीत धरा.) [अलाहाबाद १९४२

प्रकरण सोळावें

प्रतीप वर्तुल त्रितें

१६९ ज्या अ = $\frac{१}{२}$ या समीकाराचें समाधान ३०°, १२०°, ३९०°, ४८०°,.. ...या श्रेढींतील कोण करतात. ज्याची ज्या, $\frac{१}{२}$ आहे असा धन वा ऋण अलिपष्ठ कोण दर्शविण्यासाठी 'ज्या$^{-१}\frac{१}{२}$' हें व्यंजक वापरतात.

यावरून ज्या$^{-१}$ $\frac{१}{२}$ = ३०° असें लिहितां येईल.

सामान्यतः जर ज्या अ = क असेल तर ज्या$^{-१}$क, क ही ज्या असणारा अलिपष्ठ संख्यात्मक कोण दर्शविते. ज्या$^{-१}$क हें व्यंजक 'ज्या विग़ुत (minus) एक क' किंवा 'ज्या प्रतीप (inverse) क' असें वाचतात. ज्या$^{-१}$क हा कोण आहे, तर (ज्या क)$^{-१}$ हें $\frac{१}{\text{ज्या क}}$ समान आहे हें लक्षांत ठेवावें, आणि ज्या$^{-१}$क व (ज्या क)$^{-१}$ या दोन व्यंजकांविषयी घोटाळा उत्पन्न होऊं देऊं नये.

तसेंच कोज्या$^{-1}$क, क ही कोटिज्या असणारा अल्पिष्ठ धन वा ऋण कोण दर्शविते. त्याचप्रमाणे स्प$^{-1}$क, कोस्प$^{-1}$क, व्युत्कोज्या$^{-1}$क आणि व्युज्ज्या$^{-1}$क यांच्या परिभाषा देतां येतात.

ज्या$^{-1}$ क, कोज्या$^{-1}$क, स्प$^{-1}$क,......... या राशींना 'प्रतीप वर्तुल थिते' म्हणतात.

१६·२ जर ज्या अ = क, तर ज्या$^{-1}$क = अ.

(परिभाषेवरून)

∴ ज्या (ज्या$^{-1}$क) = ज्या अ = क

म्हणजे कोणत्याहि राशीच्या प्रतीप ज्ये ची ज्या घेतल्यास आपणांस ती राशि परत मिळते.

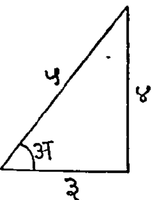
तसेंच,

कोज्या (कोज्या$^{-1}$क) = क

स्प (स्प$^{-1}$क) = क इत्यादि.

१६·३ उदाहरण १. सिद्ध करा —

$$ज्या^{-1}\frac{४}{५} + कोज्या^{-1}\frac{१२}{१३} = स्प^{-1}\frac{६३}{१६}$$

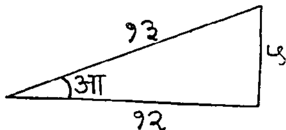


आ १६·१

समजा $\text{ज्या}^{-1} \frac{४}{५} = \text{अ}$

$\therefore \text{ज्या अ} = \frac{४}{५}$

व $\text{स्प अ} = \frac{४}{३}$



आ. १६·२

समजा $\text{कोज्या}^{-1} \frac{१२}{१३} = \text{आ}$

$$\therefore \quad \text{कोज्या आ} = \frac{१२}{१३}$$

$$\text{व} \quad \text{स्प आ} = \frac{५}{१२}$$

समजा $\text{स्प}^{-१}\frac{६३}{१६} = \text{इ}$

$$\therefore \quad \text{स्प इ} = \frac{६३}{१६}$$

आता आपणांस

$$\text{अ} + \text{आ} = \text{इ}$$

किंवा $\text{स्प}(\text{अ}+\text{आ}) = \text{स्प इ}$

हें सिद्ध करावयाचे आहे.

$$\text{स्प}\ (\text{अ}+\text{आ}) = \frac{\text{स्प अ} + \text{स्प आ}}{१ - \text{स्प अ स्प आ}}$$

$$= \frac{\frac{४}{३} + \frac{५}{१२}}{१ - \frac{४}{३}\cdot\frac{५}{१२}}$$

$$=\frac{४८+१५}{३६-२०}=\frac{६३}{१६}$$

$$=\text{स्प } इ$$

यावरून इष्ट संबंध सिद्ध होतो.

उदाहरण २. सिद्ध करा.—

$$२\,\text{स्प}^{-१}\frac{२}{५}+\text{स्प}^{-१}\frac{२१}{२०}=\frac{\text{प्या}}{२}$$

समजा $\text{स्प}^{-१}\frac{२}{५}=अ$

म्हणून $\text{स्प } अ=\frac{२}{५}$

$$\therefore\ \text{स्प}\left(\frac{\text{प्या}}{२}-२\,\text{स्प}^{-१}\frac{२}{५}\right)=\text{स्प}\left(\frac{\text{प्या}}{२}-२\,अ\right)$$

$$=\text{कोस्प } २\,अ$$

$$=\frac{१-\text{स्प}^{२}\,अ}{२\,\text{स्प } अ}$$

$$=\frac{१-\frac{४}{२५}}{२\cdot\frac{२}{५}}$$

$$=\frac{२१}{२०}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{प्या}}{२} - २ \text{ स्प}^{-१}\frac{२}{५} = \text{स्प}^{-१}\frac{२१}{२०}$$

$$\text{किंवा } २ \text{ स्प}^{-१}\frac{२}{५} + \text{स्प}^{-१}\frac{२१}{२०} = \frac{\text{प्या}}{२}$$

उदाहरण ३. सिद्ध करा —

$$\text{कोज्या}^{-१} \text{ य} - \text{कोज्या}^{-१} \text{ र} = \text{कोज्या}^{-१} \left\{\text{यर} + \sqrt{(१-\text{य}^२)(१-\text{र}^२)}\right\}$$

समजा $\text{कोज्या}^{-१} \text{ य} = \text{अ}$

म्हणून $\text{कोज्या अ} = \text{य}$,

$$\text{ज्या अ} = \sqrt{१-\text{य}^२}$$

समजा $\text{कोज्या}^{-१} \text{ र} = \text{आ}$

म्हणून $\text{कोज्या आ} = \text{र}$,

$$\text{ज्या आ} = \sqrt{१-\text{र}^२}$$

आता, $\text{कोज्या } (\text{अ} - \text{आ}) = \text{कोज्या अ कोज्या आ} + \text{ज्या अ ज्या आ}$

$$= \text{यर} + \sqrt{(१-\text{य}^२)(१-\text{र}^२)}$$

$$\text{किंवा अ} - \text{आ} = \text{कोज्या}^{-१} \left\{\text{यर} + \sqrt{(१-\text{य}^२)(१-\text{र}^२)}\right\}$$

अ आणि आ चे आदेश करून

कोज्या$^{-1}$ य $-$ कोज्या$^{-1}$ र

$$= \text{कोज्या}^{-1} \left\{ \text{यर} + \sqrt{(१ - \text{य}^२)(१ - \text{र}^२)} \right\}$$

उदाहरणसंग्रह २६

सिद्ध करा —

(१) ज्या$^{-1}$ $\frac{१}{\sqrt{५}}$ $-$ स्प$^{-1}$ $\frac{१}{३}$ $=$ कोस्प$^{-1}$ ७

(२) ज्या$^{-1}$ $\frac{३}{५}$ $-$ कोज्या$^{-1}$ $\frac{१२}{१३}$ $=$ ज्या$^{-1}$ $\frac{१६}{६५}$

[बनारस १९४३

(३) ज्या$^{-1}$ $\frac{४}{५}$ $+$ ज्या$^{-1}$ $\frac{५}{१३}$ $+$ ज्या$^{-1}$ $\frac{१६}{६५}$ $= \frac{\text{प्या}}{२}$

[कलकत्ता १९४१

(४) स्प$^{-1}$ ४ $-$ स्प$^{-1}$ $\frac{१}{४}$ $=$ स्प$^{-1}$ $\frac{१५}{८}$

(५) ४(कोस्प$^{-1}$ ३ $+$ व्युज्या$^{-1}$ $\sqrt{५}$) $=$ प्या

[कलकत्ता १९३९

(६) २स्प$^{-1}$ $\frac{१}{३}$ $+$ स्प$^{-1}$ $\frac{१}{७}$ $= \frac{\text{प्या}}{४}$ [बनारस १९४१

(७) $ज्या^{-1}$ (कोज्या य) + $कोज्या^{-1}$ (ज्या य) = प्या − २य

(८) $ज्या^{-1}$ य + $कोज्या^{-1}$ य = $\frac{प्या}{२}$ [बनारस १९४५

(९) $कोस्प^{-1}$ य − $कोस्प^{-1}$ र = $कोस्प^{-1}\left(\frac{यर+१}{र-य}\right)$

(१०) $ज्या^{-1}$ य + $ज्या^{-1}$ र = $ज्या^{-1}\left\{य\sqrt{१-र^२} + र\sqrt{१-य^२}\right\}$

(११) २ $स्प^{-1}$ य = $ज्या^{-1}\frac{२य}{१+य^२}$

(१२) $स्प^{-1}\sqrt{य} = \frac{१}{२}$ $कोज्या^{-1}\left(\frac{१-य}{१+य}\right)$ [कलकत्ता १९४३

(१३) ज्या $कोस्प^{-1}$ कोज्या $स्प^{-1}$ य = $\sqrt{\frac{य^२+१}{य^२+१}}$ [बनारस १९४५

(१४) $स्प^{-1}$ य + $स्प^{-1}$ र = $\frac{प्या}{२}$ असल्यास

यर = १ दाखवा.

(१५) (१) ज्या $\left(ज्या^{-1}\frac{\sqrt{३}}{२} + कोज्या^{-1}\frac{\sqrt{३}}{२}\right)$

(२) कोज्या$\left(\text{कोज्या}^{-1}\text{क} + \text{व्युत्कोज्या}^{-1}\ \frac{१}{\text{क}}\right)$

यांच्या अर्हा काढा.

(१६) य चें कोणतें मान

$$\text{स्प}^{-1}२\text{य} + \text{स्प}^{-1}३\text{य} = ४५^\circ$$

या समीकाराचें समाधान करतें? उत्तराचीं कारणें द्या.

[बनारस १९४२

उत्तरें

उदाहरणें

१. (१) ४५ अं ९७′५०″   (२) १७ अं २७′५०″

२. (१) ७१° २९′३४″·९०८ (२) ७८° २५′१९″·०२

उदाहरणसंग्रह १

(१) ११ पाद

(२) ११९·०४७९४ शतिमान

(३) १० व ३५

(४) ७२°, ९०°, १०८°, १२६°, १४४°;

$\frac{\text{२प्या}}{\text{५}}, \frac{\text{प्या}}{\text{२}}, \frac{\text{३प्या}}{\text{५}}, \frac{\text{७प्या}}{\text{१०}}, \frac{\text{४प्या}}{\text{५}}$

(५) (१) १०५°, ११६$\frac{\text{२अं}}{\text{३}}$, $\frac{\text{७प्या}}{\text{१२}}$

(२) १००°, १११$\frac{\text{१अं}}{\text{९}}$, $\frac{\text{५प्या}}{\text{९}}$

(३) $२२\frac{१}{२}^{\circ}$, $२५^{\text{अं}}$, $\frac{\text{प्या}}{८}$

(६) ८५९·४३७ पाद

उदाहरणसंग्रह २

(२१) $\frac{\text{ज्या}^{२}\,\text{अ}}{१+\text{ज्या}\,\text{अ}}$ (२२) $\frac{१+\text{व्युत्कोज्या}^{३}\,\text{अ}}{\text{व्युत्कोज्या}\,\text{अ}}$

उदाहरणसंग्रह ३

(१) जर ज्या अ = य, तर कोज्या अ = $\sqrt{१-\text{य}^{२}}$,

$$\text{स्प अ} = \frac{\text{य}}{\sqrt{१-\text{य}^{२}}},\ \text{व्युज्ज्या अ} = \frac{१}{\text{य}},$$

$$\text{व्युत्कोज्या अ} = \frac{१}{\sqrt{१-\text{य}^{२}}},$$

$$\text{कोस्प अ} = \frac{\sqrt{१-\text{य}^{२}}}{\text{य}}$$

(२) जर स्प अ = य, तर

$$\text{ज्या अ} = \frac{\text{य}}{\sqrt{१+\text{य}^{२}}},\ \ \text{कोज्या अ} = \frac{१}{\sqrt{१+\text{य}^{२}}},$$

$$व्युज्ज्या\ अ = \frac{\sqrt{१ + य^२}}{य},\ व्युत्कोज्या\ अ = \sqrt{१ + य^२},$$

$$कोस्प\ अ = \frac{१}{य}$$

(३) जर व्युत्कोज्या अ = य, तर

$$ज्या\ अ = \frac{\sqrt{य^२ - १}}{य},\ कोज्या\ अ = \frac{१}{य},$$

$$स्प\ अ = \sqrt{य^२ - १},\ व्युज्ज्या\ अ = \frac{य}{\sqrt{य^२ - १}},$$

$$कोस्प\ अ = \frac{१}{\sqrt{य^२ - १}}$$

(४) $$ज्या\ अ = \frac{१}{\sqrt{१ + कोस्प^२\ अ}},$$

$$कोज्या\ अ = \frac{कोस्प\ अ}{\sqrt{१ + कोस्प^२\ अ}}$$

(५) $$कोज्या\ अ = \frac{\sqrt{व्युज्ज्या^२\ अ - १}}{व्युज्ज्या\ अ},$$

$$कोस्प\ अ = \sqrt{व्युज्ज्या^२\ अ - १}$$

(६) जर $ज्या\ अ = \frac{क्ष\ (क्ष + २ज्ञ)}{क्ष^२ + २क्ष ज्ञ + १ज्ञ^२}$, तर

$$\text{कोज्या अ} = \frac{२\text{ज्ञ}\ (\text{क्ष} + \text{ज्ञ})}{\text{क्ष}^२ + २\text{क्ष}\text{ज्ञ} + २\text{ज्ञ}^२}$$

$$\text{स्प अ} = \frac{\text{क्ष}\ (\text{क्ष} + २\ \text{ज्ञ})}{२\ \text{ज्ञ}\ (\text{क्ष} + \text{ज्ञ})},$$

$$\text{व्युज्या अ} = \frac{\text{क्ष}^२ + २\ \text{क्ष}\ \text{ज्ञ} + २\ \text{ज्ञ}^२}{\text{क्ष}\ (\text{क्ष} + २\ \text{ज्ञ})},$$

$$\text{व्युत्कोज्या अ} = \frac{\text{क्ष}^२ + २\ \text{क्ष}\text{ज्ञ} + २\ \text{ज्ञ}^२}{२\ \text{ज्ञ}\ (\text{क्ष} + \text{ज्ञ})},$$

$$\text{कोस्प अ} = \frac{२\ \text{ज्ञ}\ (\text{क्ष} + \text{ज्ञ})}{\text{क्ष}\ (\text{क्ष} + २\ \text{ज्ञ})}$$

(७) $\pm \left(\frac{\text{य} + \text{र}}{\text{य} - \text{र}}\right)$

(८) $\frac{१५}{१७}$

उदाहरणसंग्रह ५

(१) ·९९९९६२ (२) ·००५८१५७

(३) २०६२६·४८८ (४) १·००००००४२३१

(५) ·०१७४५३३ (६) ३४′२३″

(७) ६′५२″·५३ (९) ३′५५″·३६

(१०) ५·१२ घटी, जवळजवळ

उदाहरणसंग्रह ६

(१) (क) ३०°, १५०° (का) ४५°, ३१५° (कि) १५०°, ३३०°

(३) १

उदाहरणसंग्रह ७

(१) $स\ प्या + (-१)^{स} \frac{प्या}{३}$ (२) $२\ स\ प्या \pm \frac{प्या}{२}$

(३) $स\ प्या + \frac{३\ प्या}{४}$ (४) $स\ प्या \pm \frac{प्या}{६}$

(५) $स\ प्या \pm \frac{प्या}{४}$ (६) $स\ प्या \pm \frac{प्या}{६}$

(९) $२\ स\ प्या + \frac{प्या}{४}$ (१०) $\frac{प्या}{म - न}$

उदाहरणसंग्रह ८

(१) $२\ स\ प्या \pm \frac{प्या}{४}$ किंवा $२\ स\ प्या \pm \frac{२\ प्या}{३}$

(२) $स\ प्या + \frac{प्या}{४}$, किंवा $स\ प्या + इ$ जेथें कोसप $इ = \frac{१}{२}$

(३) $२\ स\ प्या \pm इ$ किंवा $२\ स\ प्या \pm ई$ जेथें कोज्या $इ = \frac{२}{३}$

स कोज्या $ई = -\frac{१}{३}$ या समीकारांचें समाधान करणाऱ्या इ आणि ई अरिपष्ठ घन अहीं आहेत.

(४) $\text{२ स प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{\text{२}}$ किंवा $\text{स प्या} + \frac{\text{प्या}}{\text{३}}$

(५) $\frac{\text{स प्या}}{\text{२}}$ किंवा $\frac{(\text{२ स} + \text{१})\ \text{प्या}}{\text{१०}}$

(६) $\frac{(\text{४ स} + \text{१})\ \text{प्या}}{\text{१२}}$ किंवा $\frac{(\text{४ स} - \text{१})\ \text{प्या}}{\text{८}}$

(७) $\frac{\text{स प्या}}{\text{२}} \pm \sqrt{\text{१} + \frac{\text{स}^{\text{२}}\ \text{प्या}^{\text{२}}}{\text{४}}}$

(८) न आणि म कोणतेहि पूर्णांक असल्यास,

$$\text{इ} = (\text{न} + \text{म} + \text{१})\ \frac{\text{प्या}}{\text{२}} \text{ व } \text{ई} = (\text{न} - \text{म})\ \frac{\text{प्या}}{\text{२}} + \frac{\text{प्या}}{\text{३}}$$

(९) न आणि म कोणतेहि पूर्णांक असल्यास,

$$\text{य} = \frac{\text{१}}{\text{१६}} \left[(\text{१० म} - \text{६ न})\ \text{प्या} \mp \frac{\text{३ प्या}}{\text{४}} \pm \frac{\text{५ प्या}}{\text{३}}\right]$$

$$\text{र} = \frac{\text{१}}{\text{१६}} \left[(\text{१० न} - \text{६ म})\ \text{प्या} \mp \text{प्या} \pm \frac{\text{५ प्या}}{\text{४}}\right]$$

(१०) $\text{ज्या अ} = \frac{\text{ख ग} \pm \text{क} \sqrt{\text{क}^{\text{२}} + \text{ख}^{\text{२}} - \text{ग}^{\text{२}}}}{\text{क}^{\text{२}} + \text{ख}^{\text{२}}}$

उदाहरणसंग्रह ९

(१) $\frac{\text{५६}}{\text{६५}}; \frac{\text{६३}}{\text{६५}}; -\frac{\text{१६}}{\text{६३}}$

(३) $\frac{\text{प्या}}{\text{४}}$

उदाहरणसंग्रह १०

(१) $५ + २\sqrt{६}$

उदाहरणसंग्रह ११

(१) $\frac{४ स्प क - ४ स्प^{३} क}{१ - ६ स्प^{२} क + स्प^{४} क}$

उदाहरणसंग्रह १२

(१) $\frac{७\sqrt{११०}}{११०}$ (२) $\frac{न}{म}$

(३) $(१)\sqrt{२}+१$

उदाहरणसंग्रह १४

(१) $२न प्या$ किंवा $२न प्या + \frac{प्या}{२}$

(२) $न प्या + (-१)^{न} \frac{प्या}{६}$

(३) $न. ३६०^{\circ} + १६^{\circ}१२'$ किंवा $न. ३६०^{\circ} - २२^{\circ}८'$

(४) $२न प्या$ किंवा $२न प्या + \frac{प्या}{४}$

(५) $२ \text{ स प्या} + \frac{२\text{प्या}}{३}$ किंवा २ स प्या

(७) $\left(\text{स} + \frac{१}{२}\right) \frac{\text{प्या}}{३}$ किंवा $\text{स प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{३}$

(८) $\frac{\text{स प्या}}{२}$ किंवा $\text{स प्या} + (-१)^{\text{स}-१} \frac{\text{प्या}}{६}$

(९) $\text{स प्या} + \frac{\text{प्या}}{२}$ किंवा $\text{स प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{३}$

(१०) $\text{स प्या} + \frac{\text{प्या}}{४}$ किंवा $\text{स प्या} + \text{इ}$, जेथें $\text{स्प इ} = \frac{१}{२}$

(११) $\frac{\text{स प्या}}{२} + (-१)^{\text{स}} \frac{\text{प्या}}{१२}$

(१२) स प्या किंवा $\left(\text{स} - \frac{१}{४}\right) \frac{\text{प्या}}{२}$

(१३) $२ \text{ स प्या} + \frac{\text{प्या}}{२}$ किंवा $\frac{१}{५}\left(२ \text{ स प्या} - \frac{\text{प्या}}{२}\right)$

(१४) $\frac{\text{स प्या}}{३}$ किंवा $\frac{\text{स प्या}}{२}$

(१५) $(२ \text{ स} + १) \frac{\text{प्या}}{४}$ किंवा $२ \text{ स प्या} \pm \frac{२ \text{ प्या}}{३}$

(१६) $\frac{\text{स प्या}}{३}$, किंवा $\text{स प्या} \pm \text{इ}$ जेथें $\text{स्प इ} = \frac{१}{\sqrt{२}}$

(१७) $\text{स प्या} + \frac{\text{प्या}}{४}$ किंवा $२ \text{ स प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{३}$

(१८) स प्या किंवा $\frac{\text{स प्या}}{४}+(-१)^{ष}\frac{\text{प्या}}{२४}$

उदाहरणसंग्रह १६

(१) $\text{आ}=२\frac{१}{२}$, $\text{अ}=१$, $\text{अ}_{१}=२$, $\text{अ}_{२}=३$, $\text{अ}_{३}=६$

उदाहरणसंग्रह १७

(२) २३ पाद; २४$\sqrt{३}$ वर्ग पाद

उदाहरणें

(१) $\overline{२}$·२९५३ (२) ३·८२३९ (३) १·४०६३

उदाहरणें

(१) ·१५०१· (२) ७·०८१ (३) २५१२

उदाहरणसंग्रह १८

(१) (१) ·१२३९ (२) २·२८०४ (३) ·४२४७८ (४) $\overline{१}$·१८५८६

(२) $\overline{२}$; ०; $\overline{५}$; ०; २

(३) ·०१४०२; २·१८२

(४) (१) ३·४३७ (२) ११·२३

(५) (१) $\frac{२८२१}{१०^{१३}}$; $\frac{५४७६}{१०^{११}}$; २९२२ $\times$ $१०^{२११}$

(२) १·४१७; १२०·४; ·०४२६१

(७) (१) ९०·१८ (२) ·३७७१ (३) २·४०२

(८) ·२७९०; १·०२१५१; २·१४२०

(९) $\frac{ख}{२}$ व $-\frac{ख}{३}$

(१०) (१) $\frac{१}{७}$ (२) $\frac{१}{४}$ (३) २

(११) (अ) (१) २२ (२) २१
(आ) (१) ९ वें (२) ७ वें

(१२) (१) १; $\frac{छे\,२}{छे\,७}$ म्हणजे ·३५६१……

(२) $\frac{२\,(छे\,७ - छे\,३)}{(६\,छे\,२ - छे\,३ - छे\,७)}$ म्हणजे २·२४९२……

(३) $य = \frac{२\,ख^{२} + खग + कग - कख - क^{२}}{क\,(ख + ग - क)}$,

$र = \frac{ख - क}{ख + ग - क}$,

जेथें क = छे२, ख = छे३, ग = छे७

(१३) $\overline{१}$·९९४७२६

(१४) १·२३९६३

उदाहरणसंग्रह १९

(१) क = ७०°३१′३०″, ख = १९°२८′३०″, गा = ९ $\sqrt{२}$
(२) का = ४०($\sqrt{६}$ − $\sqrt{२}$), गा = ४०(२ − $\sqrt{३}$)

(३) क = ६०°, ख = ३०°, का = (४·३) √३

(४) कग = ६ √३ पाद; फग = ८·०८२ पाद;
कच = ३ √३ पाद; गच = ६·१९२ पाद

उदाहरणसंग्रह २०

(२) २५°२१′

(३) २८°५७′; ४६°३४′; १०४°२९′

(५) क = ४८°११′२०″, ख = ५८°२४′४०″, ग = ७३°२४′

(६) क = १०५°, ख = १५°, ग = ६०°

(७) क = ४५°, ख = ७५°, ग = ६०°

(८) क = ३७°२९′१२″, ख = ५३°३१′, ग = ८८°५२′४८″

उदाहरणसंग्रह २१

(१) क = ८३°३९′४०″, ख = ४२°२०′२०″, गा = १९६·२

(२) क = १०८°२६′१२″, ख = १८°२६′

(३) ग = ११७°३८′४५″, क = २७°३८′४५″

(४) क = ४९°३४′२५″, ख = ३६°४४′१५″

(५) ख = ९०°, ग = ३०°, का:खा = √३ :२

(६) क = १२४°४८′४०″, ख = ३३°११′२०″

(७) ख = ७८°४९′, ग = ५६°४१′

(८) ख = १०८°३६′२०″, ग = ३१°२३′४०″

(९) ख = ९४°४२′४०″, ग = २५°१७′२०″

(१०) ख = ७५°, ग = ३०°, का = √६

उदाहरणसंग्रह २२

(१) खा = २·३५३५, गा = ३·१७०५

(२) ग = ३५°२०′, खा = ३६४·२, गा = २१३·५

(३) १७२·६

(४) ग = ७०°३०′, खा = १८·१६, गा = ३७·१६

(५) १३·३६

उदाहरणसंग्रह २३

(१) (१) एक त्रिकोण शक्य आहे.
ग = ३५°२५′, क = २९°२९′, का = १२·१८

(२) दोन त्रिकोण शक्य आहेत.
ग$_{१}$ = ४९°५९′, क$_{१}$ = ९९°१९′, का$_{१}$ = ४२·५२;
ग$_{२}$ = १३०°१′, क$_{२}$ = १९°१७′, का$_{२}$ = १४·२३

(३) एकहि त्रिकोण शक्य नाही.

(४) एक लंबकोणत्रिकोण शक्य आहे.
ग = ९०°, क = ४५°, का = ४$\sqrt{२}$

(२) क$_{१}$ = ६३°५५′, ख$_{१}$ = ६७°२८′, खा$_{१}$ = ५८·१५,
क$_{२}$ = ११६°५′, ख$_{२}$ = १५°१८′, खा$_{२}$ = १६·६२

(३) प्रकार (२) संदिग्ध आहे.
ग$_{१}$ = ३८°४१′, ख$_{१}$ = १११°१९′, खा$_{१}$ = ३७२·६ पाद;
ग$_{२}$ = १४१°१९′, ख$_{२}$ = ८°४१′, खा$_{२}$ = ६०·३९ पाद

(४) ३९°३५′, २८°२१′

(५) $\text{ग}_1 = \text{३०}^\circ$, $\text{ख}_1 = \text{१०५}^\circ$, $\text{गा}_1 = \sqrt{\text{२}}$;
$\text{ग}_2 = \text{६०}^\circ$, $\text{ख}_2 = \text{७५}^\circ$, $\text{गा}_2 = \sqrt{\text{६}}$

(६) ख = २६°१६'४०", ग = ११९°४३'२०", गा = ५५९·०६

उदाहरणसंग्रह २४

(३) ३ : २$\sqrt{\text{३}}$ + $\sqrt{\text{५}}$: ४

(४) ४०°५३'३०", ६०°, ७९°६'३०"; ८$\sqrt{\text{७}}$

(५) ७५°१२', ८२°२३', २२°२५'

(६) १२०°

(७) क = ३०°५४', ख = ४९°६', का = ५, खा = ४,
गा = $\sqrt{\text{२१}}$

(८) क = २०°५५'१२", ख = २६°३०'४८",
खा = ४०·००६ पाद, गा = ६५·९९४ पाद

(९) क = ४२°३०'४०", खा = १०८ पाद

(१०) का = ३८·०५, खा = २९·३९, गा = ४१·६२

उदाहरणसंग्रह २५

(१) ३७$\sqrt{\text{३}}$ पाद

(२) ७$\frac{\text{१३}}{\text{१७}}$ पाद

(३) इ, जेथें स्प इ = $\frac{\text{१}}{\text{१७}}$

(४) १६७३·७६ पाद

(५) २२३·२ पाद

(६) $\frac{\text{१}}{\sqrt{\text{३}} - \text{१}}$ कोशक

(८) $२०० \sqrt{३}$ पाद (९) १०७२ पाद

(११) $\frac{य}{\sqrt{२}}$

उदाहरणसंग्रह २६

(१५) (१) १ (२) $२क^२ - १$

(१६) $\frac{१}{६}$

पारिभाषिक शब्दावलि

आंग्ल-मराठी

acute angle न्यून कोण, निकोण
according as तदनुसार
addition योग
addition theorem योगप्रमेय
adjacent संलग्न
admissible ग्राह्य
algebra बीजगणित
algebraically बीजीय रीतीने
aliter (otherwise) अन्यथा
alternative वैकल्पिक
altitude उच्छ्राय
ambiguity संदिग्धता
ambiguous case संदिग्ध दशा
angle of depression अवनति-कोण
angle of elevation उन्नति-कोण
angular points कोणबिन्दु
anticlockwise प्रतिघटीवत्
antilogarithm प्रतिच्छेदा
approximate लगभग, स्थूल रूपाने, उपसादित, उपसन्न (brought near)
arc चाप
area क्षेत्रफल
arithmetic progression समांतर श्रेढी
article अनुच्छेद
at rest गतिहीन, विश्रामस्थ
bar शिरोदंड
bisector अर्धक
bounded सीमित
bounding arc मर्यादा-चाप
bounding line मर्यादा-रेखा
calculation गणन
case दशा
centesimal शतिक
centimeter शतिमान
centre केन्द्र
characteristic लक्षण
circle वृत्त
circular वर्तुल
circular measure वर्तुल मान
circumcentre परिकेन्द्र
circumcircle परिवृत्त

circumradius परित्रिज्या
circumscribe परिलेखन
clockwise घटीवत्
coincide (Lat co सम् + incidere— to fall upon पतन) सपतन्
coincidence सपतन्, सपात
coincident सपाती
common साधारण
common to both उभयसाधारण
common difference प्रचय
common system of logarithms सामान्य छेदा पद्धति, दशच्छेदा पद्धति (base is 10)
complementary angle स्वपूर कोण
concyclic संवृत्तीय
condition प्रतिबंध
congruent सर्वांगसम
constant अचल, स्थिरांक
continuous सतत
conversely विलोमक्रमेण, विलोमत
convert परिवर्तन
corresponding संवादी
corollary 1 (to a theorem) उपप्रमेय
2 (to a problem) उपनिर्मेय
3 (to a proposition) उपसाध्य
cosecant (cosec) व्युत्क्रमज्या (व्युज्या)
cosine (cos) कोटिज्या (कोज्या)
cotangent (cot) कोटिस्पर्शज्या, कोटिस्पज्या (कोस्प)
coversed sine उत्क्रमकोटिज्या (उत्को)
curve वक्र
cyclic वृत्तीय, चक्रिक
data न्यास, पक्ष
decagon दशकोण, दशभुज
decimal दशमिक
definition परिभाषा
degree अंश
denominator हर
diagonal विकर्ण
diameter व्यास
disc बिम्ब
division भाजन
element अवयव
equation समीकार
equilateral समभुजीय
equilateral triangle समत्रिभुज
escribe बहिर्लेख
escribed बहिर्लिखित
even सम
exact यथार्थ
excentre बहिष्केन्द्र
encircle बहिर्वृत्त
expansion विस्तार

express व्यक्त करणे
expression पदसहति, व्यंजक
exradius बहिस्त्रिज्या
exterior angle बहिष्कोण
external bisector बाह्यार्धक
externally बाह्यत
final अंतिम
finite परिमित
fixed स्थिर
foot पाद
formula सूत्र
fraction भिन्न
function भित
fundamental मूलभूत
general सामान्य
geometrical progression गुणोत्तर श्रेढी
geometry रैखिकी
given दत्त
grade अंशक
graph बिंदुरेख
harmonic mean हरात्मक मध्यक
hexagon षट्कोण, षड्भुज
horizontal क्षैतिज
hypotenuse कर्ण
identical ऐकात्म्यिक
identity ऐकात्म्य
illustrative निदर्शनात्मक
imaginary काल्पनिक
incentre अंत केन्द्र
incircle अंतर्वृत्त
inclination नति
included अंतर्गत
index of the power घातांक
inequality असमता
infinite अनन्त
infinite series अनन्त श्रेढी
infinitesimal अत्यणु
infinity अनन्ती
initial आदि, आदिम
initial line आदि रेखा
initial position आदिम स्थिति
inradius अंतस्त्रिज्या
inscribe अंतर्लेखन
integer पूर्णांक
integral अनुकल
internal angle अंत कोण
internal bisector अन्तरार्धक
internally अन्तरत
intersect मिथश्छेदन, छेदन
inverse प्रतीप
involved अंतर्भूत
isosceles triangle द्विसमत्रिभुज
latitude अक्षवृत्त
law नियम
left hand side वामपक्ष
length लांबी, आयाम
level समतल
limit सीमा
logarithm छेदा

magnitude महत्ता
mantissa (the decimal part of common logarithms) दशमिकांश.
mean मध्यक
measure माप
measurement of angles कोण-मापन
median मध्यगा
meridian ध्रुववृत्त
mile क्रोशार्क
minus वियुत
minute कला
most general सामान्यतम
multiple अपवर्त्य
natural प्राकृत
negative ऋण
notation संकेतना
numerator अंश
numerical संख्यात्मक
object वस्तु
obtuse angle अधिककोण
octagon अष्टकोण, अष्टभुज
odd अयुग्म
opposite विरुद्ध, विपरीत, सम्मुख
origin मूलबिंदु
orthocentre लम्बकेन्द्र
otherwise अन्यथा
parallel समान्तर
partly अंशतः
pedal triangle पादिक त्रिभुज
pentagon पंचकोण, पंचभुज
perimeter परिमाप
period आवर्तकाल
periodic आवर्तीय
perpendicular लम्ब
plane समतल
point of contact संस्पर्श बिन्दु
polygon बहुभुज
position स्थिति
positive धन
power घात
principle प्रनियम
problem निर्मेय
product गुणनफल
progression श्रेढी
properties गुण (Mar. गुणधर्म)
proportional अनुपाती
provided that अथ यदि
quadrant चरण
quadratic equation वर्ग-समीकार, द्विघात-समीकार
quadrilateral चतुर्भुज
quantity राशि
quotient भागफल
radian 1 n. आर (from radius अर), संचापारकोण m. (सं equal + चाप arc + अर radius—an angle subtended by an arc equal in length to the radius)

2 *adj* मारीय
radius vector नदिश त्रिज्या
raise उन्नयन
raised उद्घीत
6 raised to 5 ६ उद्घीत ५
6 raised to the power 5 ६ घात ५
ratio निष्पत्ति
real वास्तविक
reciprocal व्युत्क्रम
rectangle आयत
regular नियमित
relation सबंध
represent निरूपण
restriction निबंध
result फल
revolution परिभ्रमण
revolving line परिभ्रमण रेखा
right angle समकोण
right hand side दक्षिणपक्ष
root मूळ
rule नियम
satisfy 1 (an equation) (समीकार) समाधान
2 (a condition) (प्रतिबंध) पालन
secant (sec) व्युत्क्रमकोटिज्या (व्युकोज्या)
second काष्ठिका
section छेद
section of a sphere गोलीयछेद
sector शकल
sector of a circle वृत्त शकल
segment खण्ड
semiperimeter सार्धपरिमाप
series श्रेढी
sexagesimal षाष्टिक
sextant षष्ठक
side 1 (of a solid) पार्श्व
2 (of an equation) पक्ष
3 (of a triangle) भुज
similar समरूप
simplify सरलन
sine (sin) ज्या
size परिमाण
solution (result) फल
solution of a triangle त्रिभुज निर्धारण
sphere गोल
square 1 (power) वर्ग
2 (figure) समायत
square root वर्गमूळ
squaring द्विघातन
squaring and adding वर्ग-योग करणे
standard प्रमाप
submultiple अपवर्तक
substitution आदेश
subtend आपातन

subtraction वियोग
suffix पादांक
sum योग
supplementary angle ऋजु-पूरक कोण
symbol प्रतीक
system पद्धति
table सारणी
tangent (tan) स्पर्शज्या, स्पज्या (स्प)
tangent (line) स्पर्शी, स्पर्शरेखा
tendency प्रवृत्ति
theodolite त्रिकोणमान
theorem प्रमेय
theory सिद्धान्त
throughout सार्वत
trace अनुरेखण
traced out अनुरेखित
trigonometry त्रिकोणमिति
trigonometrical त्रिकोणमितीय
uniform 1 एकरूप
2 (homogeneous) समांग
unit एकक
unknown अज्ञात
verify संचापन
versed sine उत्क्रमज्या, (उज्या)
vertical उदग्र

Symbols

– ज्या

Lt. (limit) सी (सीमा)

log (logarithm) छे (छेदा)

′ (dash) ′ (प्राग्)

पारिभाषिक शब्दावलि

मराठी–आंग्ल

अंश numerator
अंश degree
अंशक grade
अंशतः partly
अक्षवृत्त latitude
अचल constant
अज्ञात unknown
अत्यणु infinitesimal
अथ यदि provided that
अधिकोण obtuse angle
अनन्त infinite
अनन्त श्रेढी infinite series
अनन्ती infinity
अनियत indefinitely
अनुकल integral
अनुच्छेद article
अनुपाती proportional
अनुरेखण trace
अनुरेखित traced out
अंत केंद्र incentre
अंत कोण internal angle
अंतर्गत included
अंतर्लेखन inscribe
अंतर्वृत्त incircle
अंतस्त्रिज्या inradius
अंतिम final
अन्यथा aliter (otherwise)
अपवर्तक submultiple
अपवर्त्य multiple
अयुग्म odd
अर्हा value
अल्पिष्ठ least
अवनति-कोण angle of depression
अवयव element
अष्टकोन, अष्टभुज octagon
असमता inequality
आदि, आदिम initial
आदिम स्थिति initial position
आदि-रेखा initial line
आदेश substitution
आधार base
आन्तर अर्धक internal bisector
आपातन subtend

आयत rectangle
आयाम length
आर (from अर), संचापार-कोण radian *n*
आरीय radian *adj*
आवर्त, आवर्तनकाल period
आवर्तीय periodic
उच्छ्राय altitude
उत्क्रमकोटिज्या (उत्को) coversed sine
उत्क्रमज्या (उज्या) versed sine
उदग्र vertical
उन्नति कोण angle of elevation
उन्नयन raise
उन्नीत raised
६ उन्नीत ५ 6 raised to 5
उपगत approximate (brought together)
उपसादित approximate
उपसाध्य corollary
उभय-साधारण common to both
ऋजुपूरक कोण supplementary angle
ऋण negative
एकक unit
ऐकात्म identical
ऐकात्म्य identity
कर्ण hypotenuse
कला minute
काल्पनिक imaginary
काष्ठिका second
केन्द्र centre
कोटिज्या (कोज्या) cosine (cos)
कोटिस्पर्शज्या, कोटिस्पज्या (कोस्प) cotangent (cot)
कोणबिंदु angular points
कोण मापन measurement of angles
क्रोशक mile
क्षेत्रफल area
क्षैतिज horizontal
खंड segment
गणन calculation
गतिहीन motionless, at rest
गुण properties
गुणनफल product
गुणोत्तर श्रेढी geometrical progression
गोल sphere
गोलीय छेद section of a sphere
ग्राह्य admissible
घड़ीवत् clockwise
घात power
६ घात ५ 6 raised to the power 5
घातांक index of the power
चक्रिक cyclic
चतुर्भुज quadrilateral
चरण quadrant
चर variable

चाप arc
छेद section
छेदा logarithm
ज्या sine (sin)
तदनुसार according as
त्रिकोणमिति trigonometry
त्रिकोणमितीय trigonometrical
दक्षिण पक्ष right hand side
दत्त given
दशाच्छेदा पद्धति, साधारण छेदा-पद्धति common system of logarithms
दशभुज, दशकोण decagon
दशमिक decimal
दशमिकांश mantissa
दशा, प्रकार case
द्विघातन squaring
द्विघात समीकार quadratic equation
द्विसमत्रिभुज isosceles triangle
धन positive
ध्रुव pole
ध्रुववृत्त meridian
नति inclination
निदर्शनात्मक illustrative
निबंध restriction
नियम law
नियमित regular
निरूपण represent
निर्धारण solution (of a triangle)
निर्मेय problem
निष्पत्ति ratio
न्यास, पद्द data
न्यून कोण acute angle
पक्ष side of an equation
पंचभुज, पंचकोण pentagon
पदसंहति expression
पदिक pedal
पद्धति system
परिकेंद्र circumcentre
परित्रिज्या circumradius
परिभाषा definition
परिभ्रमण revolution
परिभ्रमण रेखा revolving line
परिमाण size
परिमाप perimeter
परिमित finite
परिलेखन circumscribe
परिवर्तन convert
परिवृत्त circumcircle
पाद foot
पादांक suffix
पार्श्व side of a solid
पालन (प्रतिबंध) satisfy (a condition)
पूर्णांक integer
प्रचय common difference
प्रतिघटीवत् anticlockwise

प्रतिच्छेदा antilogarithm
प्रतिबंध condition
प्रतीक symbol
प्रतीप inverse
प्रनियम principle
प्रमाप standard
प्रमेय theorem
प्रवृत्ति tendency
प्राकृत natural
प्रांगुल inch
फल result, solution
बहिर्लिखित escribed
बहिर्लेखन escribe
बहिर्वृत्त excircle
बहिष्केंद्र excentre
बहिष्कोण exterior angle
बहिस्त्रिज्या exradius
बहुभुज polygon
बाह्य अर्धक external bisector
बाह्यत: externally
बिंदुरेख graph
बिंब disc
बीजगणित algebra
बैजिकरीत्या algebraically
भागफल quotient
भाजन division
भिन्न fraction
भुज side of a triangle
मध्यक mean
मध्यगा median
मर्यादा-चाप bounding arc
मर्यादा रेखा bounding line
महत्ता magnitude
मान value
माप measure
मिथश्छेदन, छेदन intersect
मूलबिंदु origin
मूलभूत fundamental
मूळ root
यथार्थ exact
यष्टि yard
योग sum, addition
योग प्रमेय addition theorem
राशि quantity
रैखिकी geometry
लक्षण characteristic
लंब perpendicular
लंबकेंद्र orthocentre
लंबकोण right angle
लंबपूर complementary
वक्र curve
वर्ग square (quantity)
वर्गमूळ square root
वर्गयोग करणे squaring and adding
वर्ग समीकार quadratic equation
वर्तुळ circular
वर्तुळ माप circular measure
वस्तु object

वाम पक्ष left hand side
वास्तविक real
विकर्ण diagonal
विरोगमान theodolite
विचरण variation
वियुत minus
वियोग subtraction
विश्रामस्थ at rest
विषम odd
विस्तार expansion
वृत्त circle
वृत्त खण्ड sector of a circle
वृत्तीय cyclic
वैकल्पिक alternative
व्यक्त करणे express
व्यंजक expression
व्यत्यासत conversely
व्यास diameter
व्युत्क्रम reciprocal
व्युत्क्रमकोटिज्या, व्युत्कोज्या (व्युको) secant (sec)
व्युत्क्रमज्या (व्युज्या) cosecant (cosec)
शकल sector
शतिक centesimal
शतिमान centimetre
शिरोदण्ड bar
शिरोबिंदु vertex
शून्य zero
श्रित function
श्रेढी progression
षड्भुज, षट्कोण hexagon
षष्ठक sextant
षाष्टिक sexagesimal
संलग्न adjacent
संवादी corresponding
सवृत्तीय concyclic
संस्पर्श बिन्दु point of contact
संकेतना notation
संख्यात्मक numerical
सचापार-कोण radian
सतत continuous
सत्यापन verify
सदिश त्रिज्या radius vector
संदिग्धता ambiguity
सम even
समतल plane
समत्रिभुज equilateral triangle
समरूप similar
समांग uniform (homogeneous)
समाधान satisfy (an equation)
समान्तर parallel
समान्तर श्रेढी arithmetic progression
समायत square (figure)
समीकार equation
संपतन coincide

सम्पतन, सम्पात coincidence
सम्पाती coincident
सम्बंध relation
सरलन simplify
सर्वांगसम congruent
साद्यंत throughout
साधन, प्रश्न-साधन solution
साधारण common
सामान्य general
सामान्य छेदा पद्धति common system of logarithms
सामान्यतम most general
सामिपरिमाप semiperimeter
सारणी table
सार्थक significant
सिद्धांत theory
सीमा limit
सीमान्ती in the limit
सीमित bounded
सूत्र formula
स्थिति position
स्थिर fixed
स्थिरांक constant
स्पज्या (स्प) tangent (tan)
स्पर्शरेखा tangent (line)
हर denominator
हरात्मक मध्यक harmonic mean

छेदा-प्रतिच्छेदा-सारणी

छेद सारणी (logarithmic tables)

	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१	२	३	४	५	६	७	८	९
१०	००००	००४३	००८६	०१२८	०१७०						५	९	१३	१७	२१	२६	३०	३४	३८
						०२१२	०२५३	०२९४	०३३४	०३७४	४	८	१२	१६	२०	२४	२८	३२	३६
११	०४१४	०४५३	०४९२	०५३१	०५६९						४	८	१२	१५	१९	२३	२७	३१	३५
						०६०७	०६४५	०६८२	०७१९	०७५५	४	७	११	१५	१९	२२	२६	३०	३३
१२	०७९२	०८२८	०८६४	०८९९	०९३४						३	७	११	१४	१८	२१	२५	२८	३२
						०९६९	१००४	१०३८	१०७२	११०६	३	७	१०	१४	१७	२०	२४	२७	३१
१३	११३९	११७३	१२०६	१२३९	१२७१						३	६	१०	१३	१६	१९	२३	२६	२९
						१३०३	१३३५	१३६७	१३९९	१४३०	३	७	१०	१३	१६	१९	२२	२५	२९
१४	१४६१	१४९२	१५२३	१५५३	१५८४						३	६	९	१२	१५	१९	२२	२५	२८
						१६१४	१६४४	१६७३	१७०३	१७३२	३	६	९	१२	१४	१७	२०	२३	२६
१५	१७६१	१७९०	१८१८	१८४७	१८७५						३	६	९	११	१४	१७	२०	२३	२६
						१९०३	१९३१	१९५९	१९८७	२०१४	३	६	८	११	१४	१७	१९	२२	२५
१६	२०४१	२०६८	२०९५	२१२२	२१४८						३	६	८	११	१४	१६	१९	२२	२४
						२१७५	२२०१	२२२७	२२५३	२२७९	३	५	८	१०	१३	१६	१८	२१	२३
१७	२३०४	२३३०	२३५५	२३८०	२४०५						३	५	८	१०	१३	१५	१८	२०	२३
						२४३०	२४५५	२४८०	२५०४	२५२९	३	५	८	१०	१२	१५	१७	२०	२२
१८	२५५३	२५७७	२६०१	२६२५	२६४८						२	५	७	९	१२	१४	१७	१९	२१
						२६७२	२६९५	२७१८	२७४२	२७६५	२	४	७	९	११	१४	१६	१८	२१
१९	२७८८	२८१०	२८३३	२८५६	२८७८						२	४	७	९	११	१३	१६	१८	२०
						२९००	२९२३	२९४५	२९६७	२९८९	२	४	६	८	११	१३	१५	१७	१९
२०	३०१०	३०३२	३०५४	३०७५	३०९६	३११८	३१३९	३१६०	३१८१	३२०१	२	४	६	८	११	१३	१५	१७	१९
२१	३२२२	३२४३	३२६३	३२८४	३३०४	३३२४	३३४५	३३६५	३३८५	३४०४	२	४	६	८	१०	१२	१४	१६	१८
२२	३४२४	३४४४	३४६४	३४८३	३५०२	३५२२	३५४१	३५६०	३५७९	३५९८	२	४	६	८	१०	१२	१४	१५	१७
२३	३६१७	३६३६	३६५५	३६७४	३६९२	३७११	३७२९	३७४७	३७६६	३७८४	२	४	६	७	९	११	१३	१५	१७
२४	३८०२	३८२०	३८३८	३८५६	३८७४	३८९२	३९०९	३९२७	३९४५	३९६२	२	४	५	७	९	११	१२	१४	१६

	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१ २ ३	४ ५ ६	७ ८ ९
२५	३९७९	३९९७	४०१४	४०३१	४०४८	४०६५	४०८२	४०९९	४११६	४१३३	२ ३ ५	७ ९ १०	१२ १४ १५
२६	४१५०	४१६६	४१८३	४२००	४२१६	४२३२	४२४९	४२६५	४२८१	४२९८	२ ३ ५	७ ८ १०	११ १३ १५
२७	४३१४	४३३०	४३४६	४३६२	४३७८	४३९३	४४०९	४४२५	४४४०	४४५६	२ ३ ५	६ ८ ९	११ १३ १४
२८	४४७२	४४८७	४५०२	४५१८	४५३३	४५४८	४५६४	४५७९	४५९४	४६०९	२ ३ ५	६ ८ ९	११ १२ १४
२९	४६२४	४६३९	४६५४	४६६९	४६८३	४६९८	४७१३	४७२८	४७४२	४७५७	१ ३ ४	६ ७ ९	१० १२ १३
३०	४७७१	४७८६	४८००	४८१४	४८२९	४८४३	४८५७	४८७१	४८८६	४९००	१ ३ ४	६ ७ ९	१० ११ १३
३१	४९१४	४९२८	४९४२	४९५५	४९६९	४९८३	४९९७	५०११	५०२४	५०३८	१ ३ ४	६ ७ ८	१० ११ १२
३२	५०५१	५०६५	५०७९	५०९२	५१०५	५११९	५१३२	५१४५	५१५९	५१७२	१ ३ ४	५ ७ ८	९ ११ १२
३३	५१८५	५१९८	५२११	५२२४	५२३७	५२५०	५२६३	५२७६	५२८९	५३०२	१ ३ ४	५ ६ ८	९ १० १२
३४	५३१५	५३२८	५३४०	५३५३	५३६६	५३७८	५३९१	५४०३	५४१६	५४२८	१ ३ ४	५ ६ ८	९ १० ११
३५	५४४१	५४५३	५४६५	५४७८	५४९०	५५०२	५५१४	५५२७	५५३९	५५५१	१ २ ४	५ ६ ७	९ १० ११
३६	५५६३	५५७५	५५८७	५५९९	५६११	५६२३	५६३५	५६४७	५६५८	५६७०	१ २ ४	५ ६ ७	८ १० ११
३७	५६८२	५६९४	५७०५	५७१७	५७२९	५७४०	५७५२	५७६३	५७७५	५७८६	१ २ ३	५ ६ ७	८ ९ १०
३८	५७९८	५८०९	५८२१	५८३२	५८४३	५८५५	५८६६	५८७७	५८८८	५८९९	१ २ ३	५ ६ ७	८ ९ १०
३९	५९११	५९२२	५९३३	५९४४	५९५५	५९६६	५९७७	५९८८	५९९९	६०१०	१ २ ३	४ ५ ७	८ ९ १०
४०	६०२१	६०३१	६०४२	६०५३	६०६४	६०७५	६०८५	६०९६	६१०७	६११७	१ २ ३	४ ५ ६	८ ९ १०
४१	६१२८	६१३८	६१४९	६१६०	६१७०	६१८०	६१९१	६२०१	६२१२	६२२२	१ २ ३	४ ५ ६	७ ८ ९
४२	६२३२	६२४३	६२५३	६२६३	६२७४	६२८४	६२९४	६३०४	६३१४	६३२५	१ २ ३	४ ५ ६	७ ८ ९
४३	६३३५	६३४५	६३५५	६३६५	६३७५	६३८५	६३९५	६४०५	६४१५	६४२५	१ २ ३	४ ५ ६	७ ८ ९
४४	६४३५	६४४४	६४५४	६४६४	६४७४	६४८४	६४९३	६५०३	६५१३	६५२२	१ २ ३	४ ५ ६	७ ८ ९
४५	६५३२	६५४२	६५५१	६५६१	६५७१	६५८०	६५९०	६५९९	६६०९	६६१८	१ २ ३	४ ५ ६	७ ८ ९
४६	६६२८	६६३७	६६४६	६६५६	६६६५	६६७५	६६८४	६६९३	६७०२	६७१२	१ २ ३	४ ५ ६	७ ७ ८
४७	६७२१	६७३०	६७३९	६७४९	६७५८	६७६७	६७७६	६७८५	६७९४	६८०३	१ २ ३	४ ५ ५	६ ७ ८
४८	६८१२	६८२१	६८३०	६८३९	६८४८	६८५७	६८६६	६८७५	६८८४	६८९३	१ २ ३	४ ४ ५	६ ७ ८
४९	६९०२	६९११	६९२०	६९२८	६९३७	६९४६	६९५५	६९६४	६९७२	६९८१	१ २ ३	४ ४ ५	६ ७ ८

प्रतिलघुगणक-सारणी (antilogarithmic tables)

	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१ २ ३	४ ५ ६	७ ८ ९
·००	१०००	१००२	१००५	१००७	१००९	१०१२	१०१४	१०१६	१०१९	१०२१	० ० १	१ १ १	२ २ २
·०१	१०२३	१०२६	१०२८	१०३०	१०३३	१०३५	१०३८	१०४०	१०४२	१०४५	० ० १	१ १ १	२ २ २
·०२	१०४७	१०५०	१०५२	१०५४	१०५७	१०५९	१०६२	१०६४	१०६७	१०६९	० ० १	१ १ १	२ २ २
·०३	१०७२	१०७४	१०७६	१०७९	१०८१	१०८४	१०८६	१०८९	१०९१	१०९४	० ० १	१ १ १	२ २ २
·०४	१०९६	१०९९	११०२	११०४	११०७	११०९	१११२	१११४	१११७	१११९	० १ १	१ १ २	२ २ २
·०५	११२२	११२५	११२७	११३०	११३२	११३५	११३८	११४०	११४३	११४६	० १ १	१ १ २	२ २ २
·०६	११४८	११५१	११५३	११५६	११५९	११६१	११६४	११६७	११६९	११७२	० १ १	१ १ २	२ २ २
·०७	११७५	११७८	११८०	११८३	११८६	११८९	११९१	११९४	११९७	११९९	० १ १	१ १ २	२ २ २
·०८	१२०२	१२०५	१२०८	१२११	१२१३	१२१६	१२१९	१२२२	१२२५	१२२७	० १ १	१ १ २	२ २ ३
·०९	१२३०	१२३३	१२३६	१२३९	१२४२	१२४५	१२४७	१२५०	१२५३	१२५६	० १ १	१ १ २	२ २ ३
·१०	१२५९	१२६२	१२६५	१२६८	१२७१	१२७४	१२७६	१२७९	१२८२	१२८५	० १ १	१ १ २	२ २ ३
·११	१२८८	१२९१	१२९४	१२९७	१३००	१३०३	१३०६	१३०९	१३१२	१३१५	० १ १	१ २ २	२ २ ३
·१२	१३१८	१३२१	१३२४	१३२७	१३३०	१३३४	१३३७	१३४०	१३४३	१३४६	० १ १	१ २ २	२ २ ३
·१३	१३४९	१३५२	१३५५	१३५८	१३६१	१३६५	१३६८	१३७१	१३७४	१३७७	० १ १	१ २ २	२ ३ ३
·१४	१३८०	१३८४	१३८७	१३९०	१३९३	१३९६	१४००	१४०३	१४०६	१४०९	० १ १	१ २ २	२ ३ ३
·१५	१४१३	१४१६	१४१९	१४२२	१४२६	१४२९	१४३२	१४३५	१४३९	१४४२	० १ १	१ २ २	२ ३ ३
·१६	१४४५	१४४९	१४५२	१४५५	१४५९	१४६२	१४६६	१४६९	१४७२	१४७६	० १ १	१ २ २	२ ३ ३
·१७	१४७९	१४८३	१४८६	१४८९	१४९३	१४९६	१५००	१५०३	१५०७	१५१०	० १ १	१ २ २	२ ३ ३
·१८	१५१४	१५१७	१५२१	१५२४	१५२८	१५३१	१५३५	१५३८	१५४२	१५४५	० १ १	१ २ २	२ ३ ३
·१९	१५४९	१५५२	१५५६	१५६०	१५६३	१५६७	१५७०	१५७४	१५७८	१५८१	० १ १	१ २ २	३ ३ ३
·२०	१५८५	१५८९	१५९२	१५९६	१६००	१६०३	१६०७	१६११	१६१४	१६१८	० १ १	१ २ २	३ ३ ३
·२१	१६२२	१६२६	१६२९	१६३३	१६३७	१६४१	१६४४	१६४८	१६५२	१६५६	० १ १	२ २ २	३ ३ ३
·२२	१६६०	१६६३	१६६७	१६७१	१६७५	१६७९	१६८३	१६८७	१६९०	१६९४	० १ १	२ २ २	३ ३ ३
·२३	१६९८	१७०२	१७०६	१७१०	१७१४	१७१८	१७२२	१७२६	१७३०	१७३४	० १ १	२ २ २	३ ३ ४
·२४	१७३८	१७४२	१७४६	१७५०	१७५४	१७५८	१७६२	१७६६	१७७०	१७७४	० १ १	२ २ २	३ ३ ४

	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१	२	३	४	५	६	७	८	९
२५	१७७८	१७८२	१७८६	१७९१	१७९५	१७९९	१८०३	१८०७	१८११	१८१६	०	१	१	२	२	२	३	३	४
२६	१८२०	१८२४	१८२८	१८३२	१८३७	१८४१	१८४५	१८४९	१८५४	१८५८	०	१	१	२	२	३	३	३	४
२७	१८६२	१८६६	१८७१	१८७५	१८७९	१८८४	१८८८	१८९२	१८९७	१९०१	०	१	१	२	२	३	३	३	४
२८	१९०५	१९१०	१९१४	१९१९	१९२३	१९२८	१९३२	१९३६	१९४१	१९४५	०	१	१	२	२	३	३	४	४
२९	१९५०	१९५४	१९५९	१९६३	१९६८	१९७२	१९७७	१९८२	१९८६	१९९१	०	१	१	२	२	३	३	४	४
३०	१९९५	२०००	२००४	२००९	२०१४	२०१८	२०२३	२०२८	२०३२	२०३७	०	१	१	२	२	३	३	४	४
३१	२०४२	२०४६	२०५१	२०५६	२०६१	२०६५	२०७०	२०७५	२०८०	२०८४	०	१	१	२	२	३	३	४	४
३२	२०८९	२०९४	२०९९	२१०४	२१०९	२११३	२११८	२१२३	२१२८	२१३३	०	१	१	२	२	३	३	४	४
३३	२१३८	२१४३	२१४८	२१५३	२१५८	२१६३	२१६८	२१७३	२१७८	२१८३	०	१	१	२	२	३	३	४	४
३४	२१८८	२१९३	२१९८	२२०३	२२०८	२२१३	२२१८	२२२३	२२२८	२२३४	१	१	२	२	३	३	४	४	५
३५	२२३९	२२४४	२२४९	२२५४	२२५९	२२६५	२२७०	२२७५	२२८०	२२८६	१	१	२	२	३	३	४	४	५
३६	२२९१	२२९६	२३०१	२३०७	२३१२	२३१७	२३२३	२३२८	२३३३	२३३९	१	१	२	२	३	३	४	४	५
३७	२३४४	२३५०	२३५५	२३६०	२३६६	२३७१	२३७७	२३८२	२३८८	२३९३	१	१	२	२	३	३	४	४	५
३८	२३९९	२४०४	२४१०	२४१५	२४२१	२४२७	२४३२	२४३८	२४४३	२४४९	१	१	२	२	३	३	४	४	५
३९	२४५५	२४६०	२४६६	२४७२	२४७७	२४८३	२४८९	२४९५	२५००	२५०६	१	१	२	२	३	३	४	५	५
४०	२५१२	२५१८	२५२३	२५२९	२५३५	२५४१	२५४७	२५५३	२५५९	२५६४	१	१	२	२	३	४	४	५	५
४१	२५७०	२५७६	२५८२	२५८८	२५९४	२६००	२६०६	२६१२	२६१८	२६२४	१	१	२	२	३	४	४	५	५
४२	२६३०	२६३६	२६४२	२६४९	२६५५	२६६१	२६६७	२६७३	२६७९	२६८५	१	१	२	२	३	४	४	५	६
४३	२६९२	२६९८	२७०४	२७१०	२७१६	२७२३	२७२९	२७३५	२७४२	२७४८	१	१	२	३	३	४	४	५	६
४४	२७५४	२७६१	२७६७	२७७३	२७८०	२७८६	२७९३	२७९९	२८०५	२८१२	१	१	२	३	३	४	४	५	६
४५	२८१८	२८२५	२८३१	२८३८	२८४४	२८५१	२८५८	२८६४	२८७१	२८७७	१	१	२	३	३	४	५	५	६
४६	२८८४	२८९१	२८९७	२९०४	२९११	२९१७	२९२४	२९३१	२९३८	२९४४	१	१	२	३	३	४	५	५	६
४७	२९५१	२९५८	२९६५	२९७२	२९७९	२९८५	२९९२	२९९९	३००६	३०१३	१	१	२	३	३	४	५	५	६
४८	३०२०	३०२७	३०३४	३०४१	३०४८	३०५५	३०६२	३०६९	३०७६	३०८३	१	१	२	३	४	४	५	६	६
४९	३०९०	३०९७	३१०५	३११२	३११९	३१२६	३१३३	३१४१	३१४८	३१५५	१	१	२	३	४	४	५	६	६

शुद्धिपत्र

पृष्ठ	ओळ	अशुद्ध	शुद्ध
२८	११	व, भ, म,	व, भ, म
२८	१५	$\frac{\text{वभ}}{\text{मव}}$	$\frac{\text{भव}}{\text{मव}}$
३१	६	$\frac{(\text{१} + \text{कोज्या अ})}{(\text{१} + \text{कोज्या अ})\text{स्प अ}}$	$\frac{(\text{१} + \text{कोज्या अ})}{(\text{१} + \text{ज्या अ})\text{स्प अ}}$
८०		पहिल्या आकृतींत मय रेषेखालील त्रिकोणाचा शिरोबिंदु भ पडला आहे. भ च्या जागीं व' वाचावा	
८०	५	भमव'	भमय'
१२१	१९	कोज्या क ख)	कोज्या (फ − ख)
१४१	२	अपवर्तंक	अपवर्तक
१५०	२	स्प	स्पा
१५८	८	वगमूळ	वर्गमूळ
१७३	८	$\frac{\text{२}}{\text{१} + \text{प}^{\text{२}}}$	$\frac{\text{२प}}{\text{१} + \text{प}^{\text{२}}}$
१७७	१०	$\text{प} = \text{अ स्प}\frac{\text{अ}}{\text{२}}$	$\text{प} = \text{स्प}\frac{\text{अ}}{\text{२}}$
१८०	१२	−शा सा कोज्या ग	−२ शा सा कोज्या ग

पृष्ठ	ओळ	अशुद्ध	शुद्ध
२३९	१	$अ_1अ_3, अ_3अ_1. अ_1अ_2$	$अ_2अ_3. अ_3अ_1. अ_1अ_2$
२५२	९	उछ्रायन	उन्नयन
२५६	१	छेद	छेदा
२६०	९	या समान	यासमान
२६०	१९	लक्षण	लक्षणें
२६९	१२	+२·०८२८	१+२·०८२८
२७०	१४	७२६३	७२३६
२७०	१८	७२२५	७२३५
२८९	१५	१०२°३६′	१०२°३६′
३१८	१९	∠गयक्ष	∠गकक्ष
३३६	११	$क्ष^2$ + २ क्षद + १$द्य^2$	$क्ष^2$ + २ क्षद + २$द्य^2$